Riippuvuuslogiikka

16. maaliskuuta 2018

Luku 1

PREDIKAATTILOGIIKKA

1.1 Predikaattilogiikan syntaksi

Loogiset symbolit:

- muuttujat $v_0, v_1, v_2, \ldots$
- konnektiivit $\neg, \wedge, \vee$
- kvanttorit $\exists, \forall$
- identiteettisymboli $=$
- sulut $(,)$
- pilkku ,

Muuttujina voidaan myös käyttää symboleja x, y, z, x_1, x_2 jne. (Nämä ajatellaan metakielen symboleina, jotka viittaavat objektikielen muuttujiin v_i.)

Ei-loogiset symbolit eli aakkosto τ on joukko

- relaatiosymboleja R,
- funktiosymboleja f ja
- vakiosymboleja c.

Jokaisella relaatiosymbolilla $R \in \tau$ on paikkaluku $\#(R) \in \mathbb{Z}_+$. Samoin jokaisella funktiosymbolilla $f \in \tau$ on paikkaluku $\#(f) \in \mathbb{Z}_+$.

Esimerkki 1.1. Graafien aakkosto on $\tau_{Gr} = \{E\}$, missä $\#(E) = 2$ ja $E(x, y)$ tarkoittaa "x:n ja y:n välillä on särmä".

Aritmetiikan aakkosto on $\tau_{Ar} = \{f_+, f_\times, c_0, c_1\}$, missä $\#(f_+) = \#(f_\times) = 2$.

$f_+(x, y)$ merkitään tavallisesti $x + y$

$f_\times(x, y)$ merkitään tavallisesti $x \cdot y$ tai xy

c_0 merkitään tavallisesti 0

c_1 merkitään tavallisesti 1

Siis $f_\times(f_+(x, 1), f_+(y, f_+(z, 1)))$ voidaan kirjoittaa $(x + 1) \cdot (y + (z + 1))$.

Vastaavasti $ax+by$ voidaan esittää funktioilla f_+ ja $f_\times$ muodossa $f_+(f_\times(a, x), f_\times(b, y))$.

Määritelmä 1.2 (τ-termit)**.** *τ-termien joukko* $\mathcal{T}[\tau]$ on pienin joukko X, jolla pätee ehdot:

(1) $v_i \in X$ jokaisella $i \in \mathbb{N}$

(2) $c \in X$ jokaisella vakiosymbolilla $c \in \tau$

(3) jos $t_1, \ldots, t_n \in X$ ja $f \in \tau$ on funktiosymboli s.e. $\#(f) = n$, niin $f(t_1, \ldots, t_n) \in X$.

Kysymyksessä on siis rekursiivinen määritelmä, joten τ-termejä koskevia väitteitä voi todistaa induktiolla.

Esimerkki 1.3. Olkoon τ_{Ar} (aritmetiikan aakkosto) kuten yllä.

- $v_{12}, c_0, f_+(v_0, c_0)$ ja $f_\times(f_\times(v_3, v_5), f_+(c_1, c_1))$ ovat τ_{Ar}-termejä. Kaksi viimeistä voidaan kirjoittaa muodossa $v_0 + 0$ ja $(v_3 \cdot v_5) \cdot (1 + 1)$.
- $x \cdot x + (x + 1)$ voidaan esittää muodossa $f_+(f_\times(x, x), f_+(x, 1))$, joten se on τ_{Ar}-termi.
- Sen sijaan $x^2 + 2x + 3$ ei varsinaisesti ole τ_{Ar}-termi, koska potenssiinkorotus ei ole funktiosymbolina ja luvut 2 ja 3 vakiosymboleina aakkostossa τ_{Ar}. Sovitaan kuitenkin tässä, että merkintää x^2 saa käyttää lyhenteenä tulolle $x \cdot x$ ja lukuja 2 ja 3 lyhenteinä termeille $1 + 1$ ja $(1 + 1) + 1$. Tällä tulkinnalla $x^2 + 2x + 3$ on τ_{Ar}-termi. (Sama pätee kaikille polynomeille.)

Graafien aakkostolla τ_{Gr} pätee $\mathcal{T}[\tau_{Gr}] = \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Määritelmä 1.4 (τ-atomikaavat)**.** *τ-atomikaavojen joukko* $\mathcal{A}[\tau]$ on pienin joukko X, jolla pätee:

(1) jos $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}[\tau]$ ja $R \in \tau$ s.e. $\#(R) = n$, niin $R(t_1, \ldots, t_n) \in X$.

(2) jos $t_1, t_2 \in \mathcal{T}[\tau]$, niin $t_1 = t_2 \in X$.

Esimerkki 1.5. Koska $\mathcal{T}[\tau_{Gr}] = \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, τ_{Gr}-atomikaavoja on vain kahta tyyppiä:

- $E(v_i, v_j), \quad i, j \in \mathbb{N}$
- $v_i = v_j, \quad i, j \in \mathbb{N}$

Toisaalta, koska τ_{Ar} ei sisällä yhtään relaatiosymbolia, kaikki τ_{Ar}-atomikaavat ovat muotoa $t_1 = t_2$, missä t_1 ja t_2 ovat τ_{Ar}-termejä. Esimerkiksi $f_+(v_0, v_1) = f_+(v_1, v_0)$ ja $f_\times(v_0, f_\times(v_1, v_2)) = f_\times(f_\times(v_0, v_1), v_2)$ ovat τ_{Ar}-atomikaavoja.

Määritelmä 1.6 (τ-kaavat)**.** *τ-kaavojen joukko $\mathcal{FO}[\tau]$* on pienin joukko X, jolla pätee:

(1) $\mathcal{A}[\tau] \subseteq X$

(2) jos $\varphi \in X$, niin $\neg\varphi \in X$

(3) jos $\varphi, \psi \in X$, niin $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi) \in X$

(4) jos $\varphi \in X$ ja $i \in \mathbb{N}$, niin $\exists v_i \varphi, \forall v_i \varphi \in X$.

Tavalliseen tapaan implikaatiota $\rightarrow$ ja ekvivalenssia $\leftrightarrow$ voidaan käyttää lyhennysmerkintöinä. Edelleen toinen konnektiiveista $\wedge$ ja $\vee$ voitaisiin tulkita vain lyhennysmerkinnäksi, mutta pidämme kuitenkin tässä esityksessä molempia primitiivisinä symboleina.

Sulkuja voidaan jättää pois normaaliin tapaan.

Esimerkki 1.7. Okoon $\tau = \{R, f, c\}$, missä $\#(R) = 2$ ja $\#(f) = 1$. Seuraavat ovat τ-kaavoja:

$R(f(v_0), c),\ f(c) = v_0 \rightarrow R(f(v_0), c),\ \exists v_5 f(c) = v_0$

$\forall v_0 \exists v_1 (R(v_0, v_1) \vee \neg R(v_1, c)),\ \forall v_0 (\exists v_1 R(v_0, v_1) \vee \forall v_1 \neg R(v_1, c))$

$\exists v_0 \forall v_0 \exists v_0 \forall v_0 \neg v_0 = v_0$. (Tämä ei ole kovin järkevä, mutta määritelmän mukaan se on kaava.)

Kaavan φ vapaiden muuttujien joukko $\mathrm{Fr}(\varphi)$ määritellään rekursiolla seuraavasti:

- $\mathrm{Fr}(R(t_1, \ldots, t_n)) = \mathrm{Var}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{Var}(t_n)$
- $\mathrm{Fr}(t_1 = t_2)) = \mathrm{Var}(t_1) \cup \mathrm{Var}(t_2)$
- $\mathrm{Fr}(\neg\varphi) = \mathrm{Fr}(\varphi)$
- $\mathrm{Fr}(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{Fr}(\varphi \vee \psi) = \mathrm{Fr}(\varphi) \cup \mathrm{Fr}(\psi)$
- $\mathrm{Fr}(\forall x \varphi) = \mathrm{Fr}(\exists x \varphi) = \mathrm{Fr}(\varphi) \setminus \{x\}$,

missä $\mathrm{Var}(t)$ on termissä t esiintyvien muuttjien joukko.

1.2 Struktuurit ja tulkintafunktiot

Määritelmä 1.8 (τ-struktuuri)**.** Olkoon τ aakkosto. *τ-struktuuri* on jono M, joka muodostuu seuraavista komponenteista:

- struktuurin M perusjoukko (eli universumi) $\mathrm{dom}(M)$, joka on epätyhjä
- relaatio $R^M \subseteq \mathrm{dom}(M)^n$ kullakin $R \in \tau$, missä $\#(R) = n$
- funktio $f^M : \mathrm{dom}(M)^n \to \mathrm{dom}(M)$ kullakin $f \in \tau$, missä $\#(f) = n$
- alkio $c^M \in \mathrm{dom}(M)$ kullakin $c \in \tau$.

Jos aakkosto τ on $\{R_1, \ldots, R_n, f_1, \ldots, f_m, c_1, \ldots, c_k\}$, niin τ-struktuuri M on siis jono

$$M = (\mathrm{dom}(M), R_1^M, \ldots, R_n^M, f_1^M, \ldots, f_m^M, c_1^M, \ldots, c_k^M).$$

Esimerkki 1.9. Graafi $G = (V, E)$ voidaan ajatella τ_{Gr}-struktuurina $G = (\mathrm{dom}(G), E^G)$. $E^G \subseteq \mathrm{dom}(G)^2 = V^2$ on siis symmetrinen ja irrefleksiivinen relaatio.

Luonnollisten lukujen (aritmeettinen) struktuuri on τ_{Ar}-struktuuri $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$. Tässä siis $\mathbb{N} = \mathrm{dom}(\mathcal{N})$, yhteenlaskuoperaatio $+$ on $f_+^{\mathcal{N}}$, kertolaskuoperaatio $\cdot$ on $f_\times^{\mathcal{N}}$ ja 0 ja 1 ovat vakiosymbolien c_0 ja c_1 tulkinnat $c_0^{\mathcal{N}}$ ja $c_1^{\mathcal{N}}$.

Vastaavasti määritellään kokonaislukujen, rationaalilukujen ja reaalilukujen (aritmeettiset) struktuurit $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$ ja $\mathcal{R}$ τ_{Ar}-struktuureina.

Luonnollisten lukujen järjestysstruktuuri $\mathcal{N}_<$ on τ-struktuuri, missä $\tau = \{<\}$ ja $<$ on 2-paikkainen relaatiosymboli. Tässä $\mathrm{dom}(\mathcal{N}_<) = \mathbb{N}$ ja $<^{\mathcal{N}_<} = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i < j\}$. Samoin määritellään järjestysstruktuurit $\mathcal{Z}_<$, $\mathcal{Q}_<$ ja $\mathcal{R}_<$.

Määritelmä 1.10 (Tulkintafunktio)**.** Olkoon M τ-struktuuri. *Struktuurin M tulkintafunktioita* ovat kaikki funktiot $s : V \to \mathrm{dom}(M)$, missä $V \subseteq \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Tulkintafunktion s määrittelyjoukkoa V merkitään symbolilla $\mathrm{dom}(s)$.

Tulkintafunktio s antaa siis jokaiselle muuttujalle $x \in V$ arvon eli tulkinnan struktuurin M alkiona $s(x)$.

Huomaa, että erityisesti tyhjä funktio $\emptyset : \emptyset \to \mathrm{dom}(M)$ on jokaisen struktuurin M tulkintafunktio.

Jos s on struktuurin M tulkintafunktio ja $a \in \mathrm{dom}(M)$, niin $s(a/x)$ on tulkintafunktio, joka on muuten sama kuin s paitsi että se antaa muuttujalle x tulkinnaksi alkion a. Siis

$$s(a/x)(y) = \begin{cases} a, & \text{jos } y = x \\ s(y), & \text{jos } y \neq x. \end{cases}$$

Selvästi $\mathrm{dom}(s(a/x)) = \mathrm{dom}(s) \cup \{x\}$. Erityissti jos $x \in \mathrm{dom}(s)$, niin $\mathrm{dom}(s(a/x)) = \mathrm{dom}(s)$.

Esimerkki 1.11. Olkoon M τ-struktuuri, jolla $\mathrm{dom}(M) = \{a, b, c, d\}$. Jos s on M:n tulkintafunktio, jolla $\mathrm{dom}(s) = \{x, y\}$ ja $s(x) = s(y) = a$, niin $s' = s(b/y)$ on funktio $\{(x, a), (y, b)\}$.

Edelleen $s'' = s'(c/z) = s(b/y, c/z)$ on funktio $\{(x, a), (y, b), (z, c)\}$, ja $s''' = s''(d/x) = s(b/y, c/z, d/x)$ on funktio $\{(x, d), (y, b), (z, c)\}$.

Kun M on τ-struktuuri, s on M:n tulkintafunktio, ja φ on τ-kaava, jolla $\mathrm{Fr}(\varphi) \subseteq \mathrm{dom}(s)$, voidaan kaavalle φ määrittää totuusarvo struktuurissa M tulkinnalla s. Merkitsemme $M \vDash_s \varphi$, jos kaava φ on tosi, ja $M \nvDash_s \varphi$, jos φ on epätosi struktuurissa M tulkinnalla s.

Määritelmä 1.12 (Termin arvo struktuurissa)**.** Olkoon M τ-struktuuri, s struktuurin M tulkintafunktio ja t τ-termi, jolla $\mathrm{Var}(t) \subseteq \mathrm{dom}(s)$. *Termin t arvo struktuurissa M tulkinnalla s*, $t^{M,s}$, määritellään rekursiolla seuraavasti:

- jos $t = x$, niin $t^{M,s} = s(x)$
- jos $t = c \in \tau$, niin $t^{M,s} = c^M$
- jos $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, missä $f \in \tau$, $\#(f) = n$, niin $t^{M,s} = f^M(t_1^{M,s}, \ldots, t_n^{M,s})$.

Esimerkki 1.13. (a) Olkoon $\tau = \{f, c\}$, $\#(f) = 1$, ja M τ-struktuuri, jolla $\mathrm{dom}(M) = \mathbb{N}$, $f^M = \{(i, i+1) \mid i \in \mathbb{N}\}$ ja $c^M = 0$. Olkoon $s : \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\} \to \mathrm{dom}(M)$, $s(v_i) = 2i + 1$. Tällöin

- $c^{M,s} = c^M = 0$
- $\big(f(c)\big)^{M,s} = f^M(c^{M,s}) = f^M(0) = 0 + 1 = 1$
- $\Big(f\big(f(c)\big)\Big)^{M,s} = f^M\Big(\big(f(c)\big)^{M,s}\Big) = 1 + 1 = 2$
- $\Bigg(f\Big(f\big(f(c)\big)\Big)\Bigg)^{M,s} = f^M\Bigg(\Big(f\big(f(c)\big)\Big)^{M,s}\Bigg) = 2 + 1 = 3$, jne.
- $v_i^{M,s} = s(v_i) = 2i + 1$
- $\big(f(v_i)\big)^{M,s} = f^M(v_i^{M,s}) = (2i + 1) + 1 = 2i + 2$, jne.

(b) Olkoon $L_{Ar} = \{f_+, f_\times, c_0, c_1\}$ aritmetiikan aakkosto ja $\mathcal{R}$ reaalilukujen aritmeettinen struktuuri. Olkoon s $\mathcal{R}$:n tulkintafunktio, jolla $s(x) = 2$, $s(y) = -1$ ja $s(z) = \pi$. Käytetään taas tuttuja merkintöjä $x + y$, $x \cdot y$, 0 ja 1 merkintöjen $f_+(x, y)$, $f_\times(x, y)$, c_0 ja c_1 sijaan. Samoin käytetään merkintöjä x^n ja n tulon $\underbrace{(\cdots(x \cdot x) \cdot \cdots) \cdot x}_{n \text{ kpl}}$ ja summan $\underbrace{(\cdots(1 + 1) + \cdots) + 1}_{n \text{ kpl}}$ sijaan. Tällöin

- $(3 \cdot x^2)^{\mathcal{R},s} = 3^{\mathcal{R},s} \cdot (x^2)^{\mathcal{R},s} = 3 \cdot (x^{\mathcal{R},s})^2 = 3 \cdot 2^2 = 12$
- $(y + 2 \cdot z)^{\mathcal{R},s} = y^{\mathcal{R},s} + (2 \cdot z)^{\mathcal{R},s} = -1 + 2^{\mathcal{R},s} \cdot z^{\mathcal{R},s} = -1 + 2 \cdot \pi = 2\pi - 1$

- yleisesti

$$\begin{aligned}(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)^{\mathcal{R},s} &= a_n (x^{\mathcal{R},s})^n + \cdots + a_1 x^{\mathcal{R},s} + a_0 \\ &= a_n \cdot 2^n + \cdots + a_1 \cdot 2 + a_0.\end{aligned}$$

1.3 Tarskin totuusmääritelmä

Määritelmä 1.14 (Atomikaavan totuus)**.** Olkoon M τ-struktuuri, s struktuurin M tulkintafunktio ja olkoot $t_1, \ldots, t_n$ τ-termejä, joilla $\mathrm{Var}(t_1), \ldots, \mathrm{Var}(t_n) \subseteq \mathrm{dom}(s)$. Tällöin

(1) $M \vDash_s R(t_1, \ldots, t_n) \Leftrightarrow (t_1^{M,s}, \ldots, t_n^{M,s}) \in R^M$

(2) $M \vDash_s t_1 = t_2 \Leftrightarrow t_1^{M,s} = t_2^{M,s}$.

Määritelmä 1.15 (Tarskin totuusmääritelmä)**.** Olkoon M τ-struktuuri, s struktuurin M tulkintafunktio ja φ τ-kaava, jolla $\mathrm{Fr}(\varphi) \subseteq \mathrm{dom}(s)$.

(1) Jos $\varphi \in \mathcal{A}[\tau]$, niin $M \vDash_s \varphi$ määritellään kuten edellä.

(2) Jos $\varphi = \neg\psi$, niin $M \vDash_s \varphi \Leftrightarrow M \nvDash_s \psi$.

(3) Jos $\varphi = (\psi \wedge \theta)$, niin $M \vDash_s \varphi \Leftrightarrow M \vDash_s \psi$ ja $M \vDash_s \theta$.

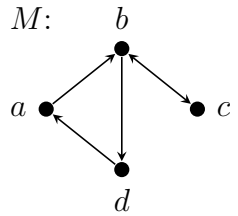
(4) Jos $\varphi = (\psi \vee \theta)$, niin $M \vDash_s \varphi \Leftrightarrow M \vDash_s \psi$ tai $M \vDash_s \theta$.

(5) Jos $\varphi = \exists x\psi$, niin $M \vDash_s \varphi \Leftrightarrow$ on olemassa $a \in \mathrm{dom}(M)$ s.e. $M \vDash_{s(a/x)} \psi$.

(6) Jos $\varphi = \forall x\psi$, niin $M \vDash_s \varphi \Leftrightarrow$ kaikilla $a \in \mathrm{dom}(M)$ pätee $M \vDash_{s(a/x)} \psi$.

Esimerkki 1.16. Olkoon $\tau = \{R\}$, $\#(R) = 2$. Tarkastellaan oheisen kuvan mukaista τ-struktuuria M (suunnattu graafi). Siis

$$\mathrm{dom}(M) = \{a, b, c, d\} \text{ ja } R^M = \{(a, b), (b, c), (b, d), (c, b), (d, a)\}.$$



Olkoon s tulkintafunktio s.e. $s(x) = a$, $s(y) = b$, $s(z) = c$ ja $s(u) = d$. Nyt esim. $M \vDash_s R(x, y)$, $M \vDash_s R(z, y)$, $M \nvDash_s R(x, z)$ ja $M \nvDash_s R(z, u)$. Siispä

$$M \vDash_s R(x, y) \wedge \neg R(x, z).$$

Jos $s' = s(d/x)$, on $s = s'(a/x)$, joten nähdään, että

$$M \vDash_{s'} \exists x(R(x, y) \wedge \neg R(x, z)),$$

vaikka selvästi $M \not\models_{s'} R(x,y) \wedge \neg R(x,z)$. Koska $s' = s'(d/x)$ pätee siis

$$M \not\models_{s'} \forall x(R(x,y) \wedge \neg R(x,z)).$$

Edelleen pätee $M \models_s \forall x \exists y R(x,y)$. Intuitiivisesti tämä on selvää, koska jokaisesta M:n alkiosta lähtee nuoli.

Esimerkki 1.17. Tarkastellaan luonnollisten lukujen järjestysstruktuuria $\mathcal{N}_< = (\mathbb{N}, <^{\mathcal{N}_<})$. Osoitetaan, että $\mathcal{N}_<, s \models \forall x \exists y \varphi$, missä φ on kaava

$$(x < y \wedge \forall z \neg(x < z \wedge z < y)).$$

Huomaa, että φ oleellisesti väittää, että y on pienin alkio, joka on suurempi kuin x. Jos siis x tulkitaan luvuksi i, y pitää tulkita luvuksi $i+1$, jotta φ olisi tosi. Määritellään siis $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ asettamalla $h(i) = i+1$ ja päätellään seuraavasti:

(i) Selvästi jokaisella $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}_< \models_{s(i/x,h(i)/y)} x < y$.

(ii) Jos $j \in \mathbb{N}$, niin $j \leq i$ tai $j \geq i+1$. Edellisessä tapauksessa

$$\mathcal{N}_< \not\models_{s(i/x,h(i)/y,j/z)} x < z$$

ja jälkimmäisessä

$$\mathcal{N}_< \not\models_{s(i/x,h(i)/y,j/z)} z < y.$$

(iii) Siis jokaisella $j \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{N}_< \not\models_{s(i/x,h(i)/y,j/z)} x < z \wedge z < y,$$

joten

$$\mathcal{N}_< \models_{s(i/x,h(i)/y)} \forall z \neg(x < z \wedge z < y).$$

(iv) Yhdistämällä (i) ja (iii) nähdään, että jokaisella $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}_< \models_{s(i/x,h(i)/y)} \varphi$.

(v) Siis jokaisella $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}_< \models_{s(i/x)} \exists y \varphi$, josta väite $\mathcal{N}_< \models_s \forall x \exists y \varphi$ seuraa.

Huomaa, että tässä esimerkissä tulkintafunktiolla s ei ollut mitään merkitystä; argumentti pätee millä hyvänsä tulkintafunktiolla s. Tämä on esimerkki yleisestä periaatteesta: Kaikilla struktuureilla M, tulkintafunktioilla s ja kaavoilla φ pätee ekvivalenssi

$$M \models_s \varphi \iff M \models_{s'} \varphi,$$

missä $s' = s \restriction \mathrm{Fr}(\varphi)$, eli s' on funktion s rajoittuma kaavan φ vapaiden muuttujien joukkoon $\mathrm{Fr}(\varphi)$.

Erityisesti jos φ on *lause*, eli $\mathrm{Fr}(\varphi) = \emptyset$, pätee ekvivalenssi $M \models_s \varphi \iff M \models_\emptyset \varphi$. Tällöin on tapana jättää alaindeksi $\emptyset$ pois ja merkitä lyhyesti $M \models \varphi$.

1.4 Negaatio-normaalimuoto

Kaava φ on negaatio-normaalimuodossa, NNF, jos siinä on negaatioita vain atomikaavojen edessä. Täsmällinen määritelmä negaatio-normaalimuotoisten kaavojen joukolle on seuravanlainen:

Määritelmä 1.18 (NNF)**.** *Negaatio-normaalimuotoisten τ-kaavojen joukko $\mathcal{NNF}[\tau]$* on pienin joukko X, jolla pätee:

(1) jos $\varphi \in \mathcal{A}[\tau]$, niin $\varphi, \neg\varphi \in X$

(2) jos $\varphi, \psi \in X$, niin $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi) \in X$

(3) jos $\varphi \in X$ ja $i \in \mathbb{N}$, niin $\exists v_i\varphi, \forall v_i\varphi \in X$.

Selvästi $\mathcal{NNF}[\tau] \subseteq \mathcal{FO}[\tau]$. Käänteiseen suuntaan tämä pätee loogista ekvivalenssia vaille:

- Jokaisella $\varphi \in \mathcal{FO}[\tau]$ on olemassa $\psi \in \mathcal{NNF}[\tau]$, jolla $\mathrm{Fr}(\varphi) = \mathrm{Fr}(\psi)$ ja $\varphi \equiv \psi$.

Tässä $\varphi \equiv \psi$ tarkoittaa kaavojen loogista ekvivalenssia:

- Kaikilla τ-struktuureilla M ja kaikilla tulkintafunktioilla s s.e. $\mathrm{Fr}(\varphi) \subseteq \mathrm{dom}(s)$ pätee $M \vDash_s \varphi \vDash_s \psi$.

Kaavan kanssa ekvivalentti NNF kaava saadaan yksinkertaisesti ”puskemalla negaatiot atomikaavojen eteen”. Tämä tapahtuu vaiheittain käyttämällä sääntöjä

- $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$
- $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$
- $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$
- $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$
- $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$.

Näiden sääntötöjen soveltaminen voidaan tehdä systemaattisesti määrittelemällä seuraavat kaksi operaatiota $\varphi \mapsto \varphi^p$ ja $\varphi \mapsto \varphi^d$ kaavoille:

- $\varphi^p = \varphi$ ja $\varphi^d = \neg\varphi$, kun $\varphi \in \mathcal{A}[\tau]$
- $(\neg\varphi)^p = \varphi^d$ ja $(\neg\varphi)^d = \varphi^p$
- $(\varphi \wedge \psi)^p = \varphi^p \wedge \psi^p$ ja $(\varphi \wedge \psi)^d = \varphi^d \vee \psi^d$

- $(\varphi \vee \psi)^p = \varphi^p \vee \psi^p$ ja $(\varphi \vee \psi)^d = \varphi^d \wedge \psi^d$
- $(\forall x\varphi)^p = \forall x\varphi^p$ ja $(\forall x\varphi)^d = \exists x\varphi^d$
- $(\exists x\varphi)^p = \exists x\varphi^p$ ja $(\exists x\varphi)^d = \forall x\varphi^d$.

On suoraviivaista todistaa induktiolla, että φ^p ja φ^d ovat aina negaatio-normaalimuodossa, ja lisäksi $\varphi^p \equiv \varphi$ ja $\varphi^d \equiv \neg\varphi$.