Lineaarialgebra 1A (2018), harjoitus 5,
viikolla 7

Huom. Lihavointi kirjoitetaan käsin yläviivana, esim. $\mathbf{u} = \overline{u}$.

1. Määritä pisteiden $P(1,0,2)$, $Q(2,2,0)$, $R(0,5,4)$ määräämän kolmion pinta-ala sopivan vektoritulon (eli ristitulon) avulla.

2. Määritä vektoreiden $\mathbf{u} = 3\,\mathbf{i} + \mathbf{j} \in \mathbb{R}^2$ ja $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} \in \mathbb{R}^2$ määräämän suunnikkaan pinta-ala sopivan vektoritulon (eli ristitulon) avulla.

3. Olkoon $\mathbf{a} = (2,1)$. Esitä vektori $\mathbf{u} = (4,4)$ muodossa $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, missä $\mathbf{v} \| \mathbf{a}$ ja $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$. Käytä projektiota. Piirrä kuvio.

4. a) Olkoon $\mathbf{u} = (u_1, u_2) = u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j} \in \mathbb{R}^2$. Todista, että

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{i})\,\mathbf{i} + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{j})\,\mathbf{j} = \mathrm{proj}_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) + \mathrm{proj}_{\mathbf{j}}(\mathbf{u}).$$

   b) Tutkittava, onko vastavektorin projektio sama kuin vektorin projektio (ts. onko $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$: $\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}) = \mathrm{proj}_{\mathbf{a}}(-\mathbf{u})$).

5. Oletetaan, että A, B, C ovat 3×3-matriiseja ja että $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita. Todista oikeaksi tai vääräksi.
   a) Jos $A^2 = B^2$, niin $A = \pm B$.
   b) Jos $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{v}$, niin $\mathbf{u} = \pm\mathbf{v}$.
   c) Jos $AB = AC$, missä $\det A \neq 0$, niin $B = C$.
   d) Jos $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$, missä $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, niin $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.
   e) Jos $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, missä $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, niin $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

6. Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Todista, että

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \Rightarrow \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$$

   (Pythagoraan lauseen käänteinen puoli).

7. Todista kosinilause (lause 2.4.7).

8. Todista lause 2.5.2 (2).