Harj. 6 ①

**1.**

Olkoon $P(1,1,1)$ suuntaissärmiön kärkipiste, jonka viereiset kärkipisteet ovat $Q(4,\overset{4}{\cancel{5}},2)$, $R(5,1,1)$ ja $S(2,4,8)$. Määritä suuntaissärmiön tilavuus.

Ratkaisu:

Pisteiden $P(1,1,1)$, $Q(4,\overset{4}{\cancel{5}},2)$, $R(5,1,1)$ ja $S(2,4,8)$ virittämä suuntaissärmiö on vektoreiden $\mathbf{u}=\overrightarrow{PQ}$, $\mathbf{v}=\overrightarrow{PR}$ ja $\mathbf{w}=\overrightarrow{PS}$ virittämä suuntaissärmiö.

Nyt

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \overrightarrow{PQ} = (4,\overset{4}{\cancel{5}},2)-(1,1,1) = (3,\overset{3}{\cancel{4}},1),\\
\mathbf{v} &= \overrightarrow{PR} = (5,1,1)-(1,1,1) = (4,0,0),\\
\mathbf{w} &= \overrightarrow{PS} = (2,4,8)-(1,1,1) = (1,3,7).
\end{aligned}$$

Lasketaan näiden vektorien skalaarikolmitulo

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & \overset{3}{\cancel{4}} & 1\\ 4 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 7\end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 3 & 1\\ 3 & 7\end{vmatrix} = -4\cdot 18 = -72$$

$$\begin{aligned}
&= 3\cdot 0\cdot 7 + \overset{3}{\cancel{4}}\cdot 0\cdot 1 + 4\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot 0\cdot 1 - \overset{3}{\cancel{4}}\cdot 4\cdot 7 - 3\cdot 0\cdot 3\\
&= 12 - \underset{84}{\cancel{112}} = -\underset{72}{\cancel{100}}.
\end{aligned}$$

Nyt lauseen 2.5.9 nojalla

$$V = |\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})| = |-\overset{72}{\cancel{100}}| = \overset{72}{\cancel{100}}.$$

2a)

$$V_{uusi} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ 2v_1 & 2v_2 & 2v_3\end{vmatrix} (-2) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix} = 0$$

b)

$$\begin{aligned}
V_{uusi} &= |(\bar{u}+k\bar{w})\cdot(\bar{v}\times\bar{w})|\\
&= |\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{w}) + \underbrace{(k\bar{w})\cdot(\bar{v}\times\bar{w})}_{\overset{(*)}{=}0}|\\
&= |\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{w})|\\
&= V
\end{aligned}$$

$$(*)\quad \begin{vmatrix} kw_1 & kw_2 & kw_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix} (-k) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix} = 0$$

2

3 ~~8.~~

Todista lause 2.5.8.

Ratkaisu:

Väite: Kun $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, niin silloin

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Tod. Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Nyt

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \\
&= (u_1, u_2, u_3) \cdot ((v_1, v_2, v_3) \times (w_1, w_2, w_3)) && \text{[merkintä]} \\
&= (u_1, u_2, u_3) \cdot \left( \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right) && \text{[ristitulon määr.]} \\
&= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} && \text{[pistetulon määr.]} \\
&= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}, && \text{[lause 1.5.1]}
\end{aligned}$$

mikä todistaa väitteen.

4

Siis suoran $l$ parametriesitys vektorimuodossa on:

$$
\begin{aligned}
l: \quad \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + t\mathbf{d} \\
&= (\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) + t(\mathbf{i} + \overset{3}{\cancel{4}}\mathbf{j}), \qquad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Tätä muokkaamalla saadaan

$$\mathbf{r}(t) = (1 + t)\mathbf{i} + (2 + \overset{3}{\cancel{4}}t)\mathbf{j},$$

joten parametriesitys koordinaattimuodossa on:

$$\begin{cases} x(t) = 1 + t \\ y(t) = 2 + \underset{3}{\cancel{4}}t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Näistä ratkaisemalla $t$ saadaan

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{x(t) - 1}{1} \\
t &= \frac{y(t) - 2}{\cancel{4}\,3}
\end{aligned}
$$

Siis suoran $l$ symmetrinen muoto on:

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{\cancel{4}\,3}$$

Kertomalla tämä puolittain $\overset{3}{\cancel{4}}$:llä ja vähentämällä $y-2$ saadaan normaali yhtälö,

$$\overset{3}{\cancel{4}}(x - 1) + (-1)(y - 2) = 0.$$

Ratkaisemalla tästä $y$ saadaana kulmakerroin yhtälö

$$y = \underset{3}{\cancel{4}}x - \underset{1}{\cancel{2}}.$$

5 ~~4~~.

Oletetaan, että taso $p$ sisältää pisteen $P(2, 1, 3)$ ja että vektorit $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ ja $\mathbf{v} = (3, -1, 5)$ virittävät sen. Määritä tason $p$ vektori- ja koordinaattimuotoinen parametriesitys sekä normaaliyhtälö vektori- ja koordinaattimuodossa.

Ratkaisu:

Tason $p$ parametriesitys vektorimuodossa on:

$$p: \quad \mathbf{r}(t, s) = (2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + s(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}),$$

missä $t, s \in \mathbb{R}$.

Tätä muokkaamalla saadaan

$$\mathbf{r}(t,s) = (2+t+3s)\mathbf{i} + (1+2t-s)\mathbf{j} + (3+3t+5s)\mathbf{k},$$

joten parametriesitys koordinaattimuodossa

$$\begin{cases} x(t,s) = 2+t+3s \\ y(t,s) = 1+2t-s \\ z(t,s) = 3+3t+5s \end{cases} \quad (t, s \in \mathbb{R}).$$

Tason $p$ eräs normaali on

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (1,2,3) \times (3,-1,5) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= (2 \cdot 5 - 3 \cdot (-1))\mathbf{i} - (1 \cdot 5 - 3 \cdot 3)\mathbf{j} + (1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3)\mathbf{k} \\ &= 13\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 7\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Siis normaaliyhtälö vektorimuodossa on:

$$p: \quad \mathbf{N} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

eli

$$p: \quad (13\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 7\mathbf{k}) \cdot ((x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) - (2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k})) = 0.$$

Tämän sieventämällä saadaan normaaliyhtälö koordinaattimuodossa:

$$\begin{aligned} (13\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 7\mathbf{k}) \cdot ((x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) - (2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k})) &= 0 \\ (13\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 7\mathbf{k}) \cdot ((x-2)\mathbf{i} + (y-1)\mathbf{j} + (z-3)\mathbf{k}) &= 0 \\ 13(x-2) + 4(y-1) - 7(z-3) &= 0. \end{aligned}$$

Tälle vaihtoehtoinen muoto saadaan jatkamalla sieventämistä:

$$\begin{aligned} 13x - 26 + 4y - 4 - 7z + 21 &= 0 \\ 13x + 4y - 7z - 9 &= 0. \end{aligned}$$

**6.**

Etsi tason

$$p:\ 2x + 3y + z = 3$$

ja suoran

$$l:\ \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{2}$$

mahdollinen leikkauspiste (tai mahdolliset leikkauspisteet). (Vrt. lineaariset yhtälöryhmät.)

Ratkaisu:

Suoran $l$ symmetrinen muoto on

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{2} = t\ (t \in \mathbb{R}),$$

josta saadaan kolme yhtälöä

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{-1} = t \\ \dfrac{y+2}{3} = t \\ \dfrac{z-2}{2} = t \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 3t - 2 \\ z = 2t + 2 \end{cases}$$

Sijottamalla nämä tason $p$ yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 3 \\ 2(-t+1) + 3(3t-2) + (2t+2) &= 3 \\ -2t + 2 + 9t - 6 + 2t + 2 &= 3 \\ 9t &= 5 \\ t &= 5/9 \end{aligned}$$

Sijoittamalla tämä aiempaan yhtälöryhmään saadaan

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{9} + 1 = \frac{4}{9} \\ y = 3 \cdot \frac{5}{9} - 2 = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3} \\ z = 2 \cdot \frac{5}{9} + 2 = \frac{28}{9} \end{cases}.$$

Siis leikkauspiste on $(x, y, z) = (4/9, -1/3, 28/9)$.

**7.**

Etsi tasojen

$$\begin{aligned} p:&\ x + y + z = 6 \\ q:&\ 2x + 3y + z = 3 \end{aligned}$$

leikkaussuora. Yksi esitysmuoto riittää. (Vrt. lineaariset yhtälöryhmät.)

Ratkaisu:

Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + z = 3 \quad \mid -2\mathrm{I} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \quad \mid -\mathrm{II} \\ y - z = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2z = 15 \\ y - z = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2z + 15 \\ y = z - 9 \end{cases}$$

Kun merkitään $z = t$, saadaan ratkaisuksi

$$\begin{cases} x = -2t + 15 \\ y = t - 9 \\ z = t \end{cases}$$

8.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\underbrace{(y_0 - y_1)}_{a} x - \underbrace{(x_0 - x_1)}_{b} y + \underbrace{(x_0 y_1 - x_1 y_0)}_{c} = 0$$

Siis kyseessä on suoran yhtälö.

Jos $x = x_0$, $y = y_0$, saadaan

$$(-1)\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & \\ & \cdots & \end{vmatrix} = 0$$

Jos $x = x_1$, $y = y_1$, saadaan

$$(-1)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & \\ & \cdots & \end{vmatrix} = 0$$

Siis pisteet $P(x_0, y_0)$ ja $Q(x_1, y_1)$ kuuluvat suoralle.