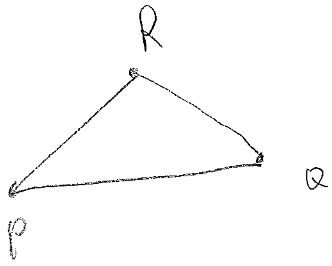
Harj. 5

1.



$\overline{u} = \overrightarrow{PQ} = (1, 2, -2)$

$\overline{v} = \overrightarrow{PR} = (-1, 5, 2)$

$$\overline{u} \times \overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = C_{11}\overline{i} + C_{12}\overline{j} + C_{13}\overline{k}$$

$$= 14\overline{i} + 7\overline{k}$$

$$\|\overline{u} \times \overline{v}\| = \sqrt{14^2 + 0^2 + 7^2}$$

$$A = \frac{1}{2}\|\overline{u} \times \overline{v}\| = \frac{1}{2}\sqrt{14^2 + 7^2}$$

2. $\overline{u} = (3, 1, 0), \ \overline{v} = (2, 5, 0)$

$$\overline{u} \times \overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = C_{11}\overline{i} + C_{12}\overline{j} + C_{13}\overline{k} = 13\overline{k}$$

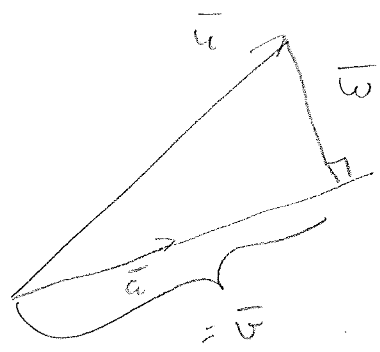
$$A = \|\overline{u} \times \overline{v}\| = 13$$

3. $\bar{a} = (2,1)$, $\bar{u} = (4,4)$

$$\text{proj}_{\bar{a}}(\bar{u}) = \left(\frac{\bar{u}\cdot\bar{a}}{\|\bar{a}\|^2}\right)\bar{a}$$

$$= \left(\frac{2\cdot 4 + 1\cdot 4}{2^2+1^2}\right)(2,1)$$

$$= \frac{12}{5}(2,1) = \bar{v}$$



$$\bar{w} = \bar{u} - \bar{v} = (4,4) - \left(\frac{24}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

$$= \left(\frac{-4}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

3

4.

a) Olkoon $\mathbf{u} = (u_1, u_2) = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} \in \mathbb{R}^2$. Todista, että

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} = \mathrm{proj}_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) + \mathrm{proj}_{\mathbf{j}}(\mathbf{u}).$$

(Kirjoita vastaava kaava avaruudessa $\mathbb{R}^3$ (ei tarvitse todistaa).)

Ratkaisu:

Väite: Kun $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, niin

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} = \mathrm{proj}_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) + \mathrm{proj}_{\mathbf{j}}(\mathbf{u}).$$

Tod. Olkoon $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Nyt

$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) + \mathrm{proj}_{\mathbf{j}}(\mathbf{u}) &= \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{i}}{\|\mathbf{i}\|^2}\mathbf{i} + \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{j}}{\|\mathbf{j}\|^2}\mathbf{j} && \text{[projektion määr.]}\\
&= \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{i}}{1^2}\mathbf{i} + \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{j}}{1^2}\mathbf{j} && \text{[stand. kantatvekt. pituus]}\\
&= (\mathbf{u}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} && \text{[sievennys]}\\
&= ((u_1, u_2)\cdot(1,0))\mathbf{i} + ((u_1, u_2)\cdot(0,1))\mathbf{j} && \text{[merkintä]}\\
&= u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} && \text{[pistetulon määr.]}\\
&= u_1(1,0) + u_2(0,1) && \text{[merkintä]}\\
&= (u_1, u_2) && \text{[vektorien laskutoim.]}\\
&= \mathbf{u}. && \text{[merkintä]}
\end{aligned}$$

Avaruudessa $\mathbb{R}^3$ vastaavakaava on

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k} = \mathrm{proj}_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) + \mathrm{proj}_{\mathbf{j}}(\mathbf{u}) + \mathrm{proj}_{\mathbf{k}}(\mathbf{u}),$$

kun $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$.

b) <u>ei</u> vastaesim.

$$\mathrm{proj}_{\bar{c}}(\bar{c}) = \left(\frac{\bar{c}\cdot\bar{c}}{\|\bar{c}\|^2}\right)\bar{c} = \bar{c}$$

$$\mathrm{proj}_{\bar{c}}(-\bar{c}) = \left(\frac{-\bar{c}\cdot\bar{c}}{\|\bar{c}\|^2}\right)\bar{c} = -\bar{c}$$

(4)

5.

a) ei, vastaesim.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A^2 = B^2 = \underline{0}$, mutta $A \neq \pm B$

b) ei $\bar{u} = \bar{0}$, $\bar{v} = \bar{\imath}$ vastaesim.

$\bar{u} \times \bar{u} = \bar{v} \times \bar{v} = \bar{0}$, mutta $\bar{u} \neq \pm \bar{v}$.

c) ok

$A^{-1} \cdot | \; AB = AC$ — A^{-1} on olemassa koska $\det A \neq 0$

$A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC)$ — assos.

$(A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C$ — käänt. matr. määr.

$\underline{I}B = \underline{I}C$ — ident. matr. määr

$B = C$

d) ei vastaesim

$\bar{u} = \bar{\imath} \neq \bar{0}$, $\bar{v} = \bar{\jmath}$, $\bar{w} = \bar{k}$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot \bar{w} = 0$ (kohtisuorassa)

mutta $\bar{v} \neq \bar{w}$

5

e) $\underline{\text{ei}}$ vastaesim.

$\bar{u} = \bar{c}^{\,\neq \bar{0}}, \ \bar{v} = \bar{c}, \ \bar{w} = 2\bar{c}$

$\bar{u} \times \bar{v} = u \times \bar{w} = \bar{0}$, koska $\bar{u} \parallel \bar{v}, \ \bar{u} \parallel \bar{w}$

mutta $\bar{v} \neq \bar{w}$

6. $\|\bar{u}+\bar{v}\|^2 = \ldots$ (vrt. kolmioepäyht. tod.)

$= \|\bar{u}\|^2 + 2(\bar{u}\cdot\bar{v}) + \|v\|^2$

$\therefore \|\bar{u}+\bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 \Leftrightarrow \bar{u}\cdot\bar{v} = 0 \Leftrightarrow \bar{u} \perp \bar{v}.$

8 ~~7~~.

Esitä lauseen 2.5.2 (1) todistus perusteluineen.

Ratkaisu:

Väite: Kun $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, niin silloin $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \perp \mathbf{u}$.
Tod. Oletetaan, että $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Pitää siis osoittaa, että $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0$.
Nyt

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) && \text{[pistetulon vaihd.]} \\
&= (u_1, u_2, u_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) && \text{[merkintä ja ristitulon määr.]} \\
&= u_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} && \text{[pistetulon määr.]} \\
&= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} && \text{[lause 1.5.1]} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} && \text{[lause 1.5.6]} \\
&= 0, && \text{[lause 1.5.7]}
\end{aligned}$$

joten määritelmän 2.4.4 nojalla $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \perp \mathbf{u}$.

7 ~~8~~.

Todista kosinilause (lause 2.4.~~6~~7)

Ratkaisu:

Väite: Olkoot kolmion sivujen pituudet a, b ja c ja olkoon pituudeltaan a olevan sivun vastakkainen kulma α. Silloin

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Tod. Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ vektoreita siten, että $\|\mathbf{u}\| = b$, $\|\mathbf{v}\| = c$ ja näiden välinen kulma on α sekä merkitään $a = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ (vektoreiden $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ virittämän kolmion kolmas sivu).

Nyt

$$
\begin{aligned}
a^2 &= \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 && \text{[merkintä]}\\
&= (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) && \text{[pituuden määr.]}\\
&= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} && \text{[pistetulon osittelu]}\\
&= \|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) && \text{[vaihd. ja pituuden määr.]}\\
&= \|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-2\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\alpha && \text{[kulman määr.]}\\
&= b^2+c^2-2bc\cos\alpha. && \text{[merkintä]}
\end{aligned}
$$