MTTP 3 Harjoitus 3 Ryhmä 2 01.02.2018

Mallivastaukset

1. $\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

Kerrotaan ensimmäinen sarake skalaarilla −1 ja lisätään viimeiseen sarakkeeseen.

$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$\det(A) \overset{\text{(Lause 1.5.5)}}{=} -1 \cdot 1 \cdot (-3) = 3$

$\begin{array}{ccccc} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 3 \end{array}$

$\det(A) = -1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 1$

$= -1 + 0 - \cancel{6} + 4 + \cancel{6} - 0$

$= 3$

2. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

a) $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 4$ $\quad C_{21} = 10 \quad C_{31} = -2$

$C_{22} = 16 \quad C_{32} = 6$

$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -12$ $\quad C_{23} = -20 \quad C_{33} = 4$

$C_{13} = 15$

b) $\det(A) \overset{\text{(Lause 1.5.7)}}{=} a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + a_{13} \cdot C_{13}$

$= 4 \cdot 4 + 0 \cdot (-12) + 2 \cdot 15 = \underline{46}$

c) Nyt $\det(A) = 46 \neq 0$ eli A^{-1} on olemassa.

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{46} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{46} \begin{bmatrix} 4 & 10 & -2 \\ -12 & 16 & 6 \\ 15 & -20 & 4 \end{bmatrix}$

3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

- $\text{rank}(A) \leq \min\{2, 3\} = 2$
- nyt jokaisen 2x2-alimatriisin determinantti on 0;

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0, \text{ siis } \text{rank}(A) < 2$$

- toisaalta on olemassa ainakin yksi 1x1-alimatriisi, jonka determinantti ei ole 0.

$$[1], \quad |1| \neq 0 \quad \text{, siis} \quad \text{rank}(A) = 1.$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\text{rank}(B) \leq \min\{3, 4\} = 3$
- nyt jokaisen 3x3 alimatriisin determinantti on 0.

(3x3-alimatriisissa aina 2 samaa saraketta $\rightarrow \text{rank}(B) < 3$)

- Toisaalta on olemassa vähintään yksi 2x2-alimatriisi jonka determinantti $\neq 0$. mm. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 = -1 \neq 0$

4.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Matr. pot. määr.
2. det. tulon kaava

a) $\det(A^3) \overset{(1)}{=} \det(AAA) \overset{(2)}{=} \det(A)\det(AA)$

$\overset{(2)}{=} \det(A)\det(A)\det(A)$

$= (-2)^3 = \underline{\underline{-8}}$

b) $\det(A^0) \overset{(1)}{=} \det(I) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = \underline{\underline{1}}$

c) $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left[C_{11} \right]^T$

Seurauus s. 22

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = -\frac{1}{2}$

$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\det(A^{-1}) = 0 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$

5.

a) Olk. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Nyt $A+B = \begin{bmatrix} 1+(-1) & 0+0 \\ 0+0 & 1+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ja $\det(A) = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1$

$\det(B) = (-1)\cdot(-1) - 0\cdot 0 = 1$

$\det(AB) = 0\cdot 0 - 0\cdot 0 = 0 \neq \det(A) + \det(B)$

b) Olk. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ja $k = 2$

Nyt $kA = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\det(A) = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1$

$\det(kA) = 2\cdot 2 - 0\cdot 0 = 4 \neq 2\cdot \det(A)$

c) Olk. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Nyt $A\circ B = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 & 0\cdot 2 \\ 0\cdot 2 & 1\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\det(A) = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1$

$\det(B) = 2\cdot 2 - 2\cdot 2 = 0$

$\det(A\cdot B) = 2\cdot 2 - 0\cdot 0 = 4$

$\det(A)\det(B) = 1\cdot 0 = 0$,

joten $\det(A\cdot B) \neq \det(A)\det(B)$

6. Osoita, että $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, kun A ja B ovat 2×2 matriiseja.

Olk. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

$\det(A) = ad - bc$

$\det(B) = eh - fg$

$$\det(A)\det(B) = (ad-bc)(eh-fg)$$
$$= (adeh - adfg - bceh + bcfg)$$
$$\det(AB) = (ae+bg)(ce+dh) - (af+bh)(ce+dg)$$
$$= aecg + aedh + bgce + \cancel{bgdh} - afce - afdg - bhce - \cancel{bhdg}$$

7.

a) Olk. $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $k \in \mathbb{R}$. Merk. $A = [a_{ij}]$ $B = [b_{ij}]$

$$tr(A+B) \overset{(1)}{=} tr([a_{ij}] + [b_{ij}]) = tr([a_{ij} + b_{ij}])$$
$$= (a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}) + \dots + (a_{nn} + b_{nn})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = tr([a_{ij}]) + tr([b_{ij}])$$
$$= tr(A + B)$$

b) $$tr(kA) \overset{(1)}{=} tr(k[a_{ij}]) \overset{(2)}{=} tr([ka_{ij}])$$
$$= \sum_{i=1}^{n} ka_{ii} = k\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = k\, tr([a_{ij}])$$
$$= k\, tr(A)$$

c) Väite. $tr(AB) = tr(A)\cdot tr(B)$

VASTAESIMERKKI $A = B = I_{2\times 2}$ & $tr(AB) = tr(I) = 1+1 = 2$

$\neq 4 = 2\cdot 2 = (1+1)(1+1) = tr(A)\,tr(B)$

8. Olk. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ alakolmiomatriisi

Väite $\det(A) = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$

Todistus induktiolla luvun n suhteen.

(Merk. $A = [a_{ij}]$)

1) PA: $n = 1$, $A = [a]_{1 \times 1}$, nyt $\det(A) = |a| = a$ eli väite pätee.

2) Induktio-oletus: $\det(A) = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ aina kun A on $(n+1) \times (n+1)$ - alakolmiomatriisi.

3) Ind. väit. tod.: Olk. A $(n+1) \times (n+1)$ - alakolmiomatriisi & merk. $A = [a_{ij}]$.

Nyt $a_{ij} = 0$ kun $i < j$. Merk. A' sellaista matriisia, jossa on poistettu 1. rivi ja 1. sarake.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{(n+1)1} & \cdots & & a_{(n+1)(n+1)} \end{bmatrix}$$

Lasketaan matriisin A determinantti kofaktoriesityksellä 1. rivin suhteen.

$$\det(A) \overset{(1)}{=} a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + \dots + a_{1(n+1)} C_{1(n+1)}$$
$$\overset{(2)}{=} a_{11} C_{11} + 0 \cdot C_{12} + \dots + 0 \cdot C_{1(n+1)}$$
$$\overset{(3)}{=} a_{11} C_{11}$$
$$\overset{(4)}{=} a_{11} \cdot (-1)^{1+1} M_{11} \overset{(3)}{=} a_{11} M_{11} \overset{(5)}{=} a_{11} \det(A')$$

Nyt selvästi A' on $n \times n$ - alakolmiomatriisi, joten $\det(A) = a_{22} \dots a_{(n+1)(n+1)}$

Induktion nojalla siis $\det(A) = a_{11} a_{22} \dots a_{(n+1)(n+1)}$ $\square$

(1) kofaktori esitys
(2) A on alakolmiomatriisi
(3) RA
(4) kofaktorin määritelmä
(5) A' valinta