LH 1

OK

1

a) $A+B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

$AB = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2\cdot(-1)+1\cdot 4 & 2\cdot 2+1\cdot 2\\ 0\cdot(-1)+(-1)\cdot 4 & 0\cdot 2+(-1)\cdot 2\end{bmatrix}$

on määritelty

$AB=\begin{bmatrix}2 & 6\\ -4 & -2\end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}_{\underline{2\times 2}}$ $B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & 2\end{bmatrix}_{\underline{2\times 2}}$

$$\begin{array}{cc} -10 & -5 \end{array}$$

$kA=\begin{bmatrix}2k & k\\ 0 & -k\end{bmatrix}$

$$\begin{array}{cc} 0 & 5 \end{array}$$

b)

$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}_{\underline{2\times 2}}$ $B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}_{\underline{3\times 2}}$

$kA=\begin{bmatrix}2k & k\\ 0 & -k\end{bmatrix}$

$A+B$ ei ole olemassa

AB ei ole olemassa

2 a)

olk. A $m \times n$ matriisi ja

B $k \times l$ matriisi

Nyt koska AB, niin $n = k$

sekä koska BA, niin $l = m$

joten A $m \times n$ matriisi

ja B on $n \times m$ matriisi

b) olk. A $m \times n$ matriisi ja

B $k \times l$ matriisi

Nyt koska $(AB)A$ määr,

niin myös AB on määr,

joten $n = k$

siis AB $m \times l$ matriisi

edelleen $(AB)A$ määr, joten $l = m$

siis A on $m \times n$ matriisi

ja B $n \times m$ matriisi

3

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad A = [a_{ij}]_{3\times 3}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

a) $PA =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1\cdot a_{11} + 0\cdot a_{21} + 0\cdot a_{31}, & 1\cdot a_{12} + 0\cdot a_{22} + 0\cdot a_{32}, & \begin{matrix} 1\cdot a_{13} + \\ 0\cdot a_{23} + \\ 0\cdot a_{33} \end{matrix} \\ 0\cdot a_{11} + 0\, a_{21} + a_{31}, & 0\, a_{12} + 0\, a_{22} + a_{32}, & 0\cdot a_{13} + 0\, a_{23} + 0\cdot a_{33} \\ 0\cdot a_{11} + 1\cdot a_{21} + 0\cdot a_{31}, & 0\cdot a_{12} + 1\, a_{22} + 0\, a_{32}, & 0\cdot a_{13} + 1\cdot a_{23} + 0\cdot a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0, & 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1, & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0, & 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1, & 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0, & 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1, & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$PA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

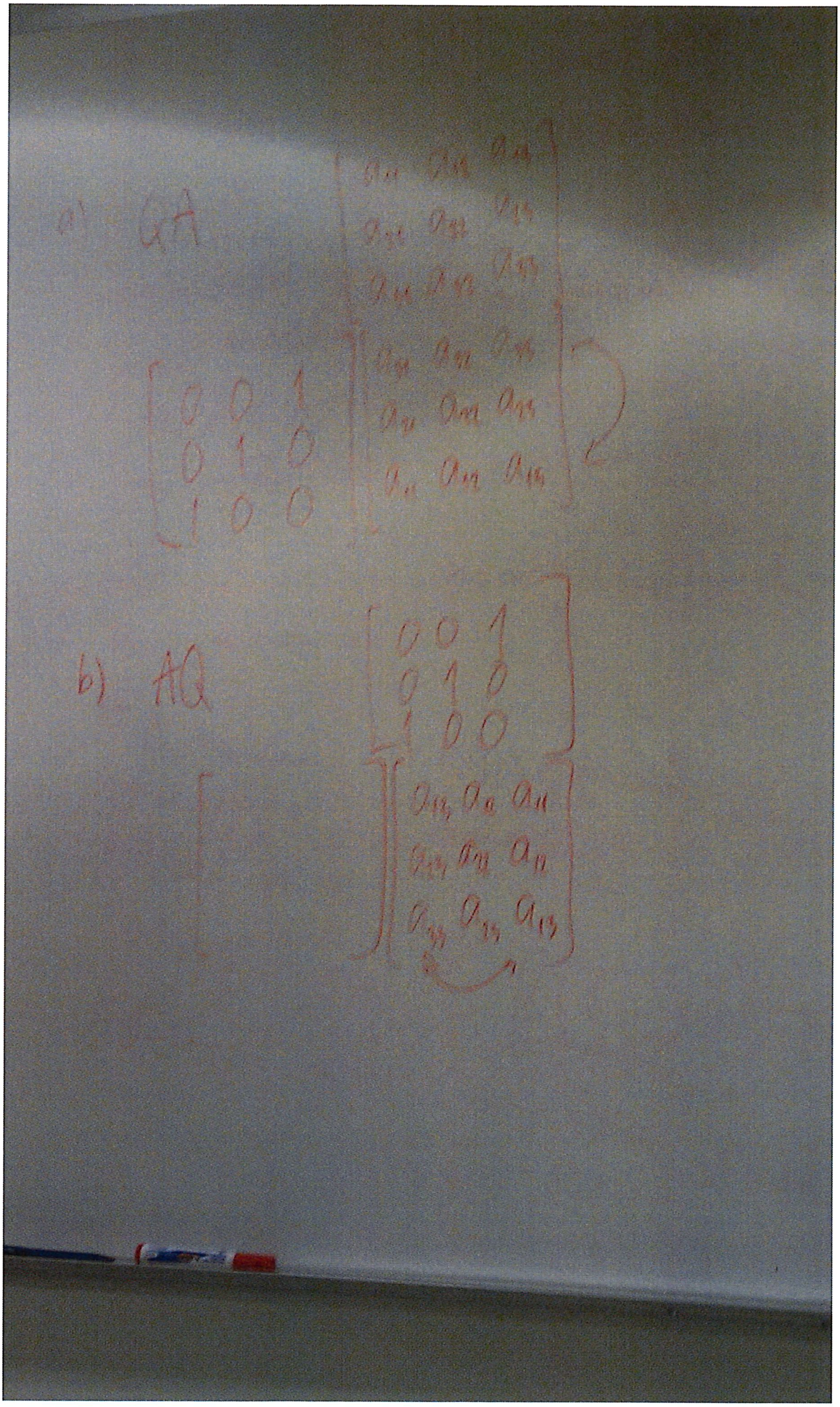
$$P(PA) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

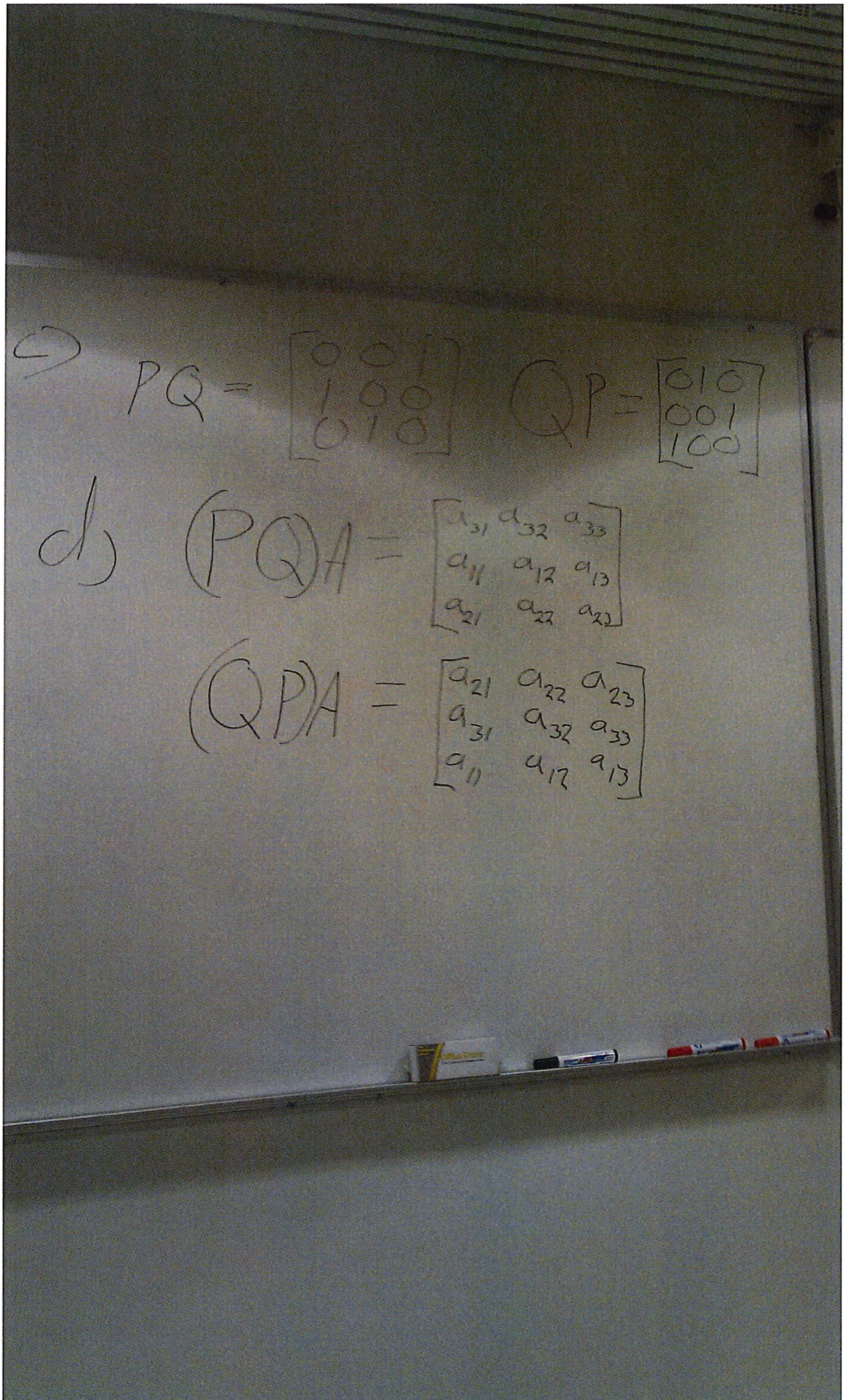
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

d)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$AP = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{bmatrix}$$


a) QA
0 0 1
0 1 0
1 0 0
b) AQ
0 0 1
0 1 0
1 0 0


c) $PQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $QP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
d) $(PQ)A = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$
$(QP)A = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$

5

$$A = [a_{ij}] = [i + 2j]_{n \times n}$$

$$B = [1]_{n \times n}$$

$$A + B = [a_{ij} + 1] = [i + 2j + 1]_{n \times n}$$

$$B + A = [1 + a_{ij}] = [a_{ij} + 1] = [i + 2j + 1]_{n \times n} = A + B$$

$$AB = \left[\sum_{k=1}^{n} (i + 2k)\right] = \left[\sum_{k=1}^{n} i + \sum_{k=1}^{n} 2k\right] = \left[i \sum_{i=1}^{n} 1 + 2 \sum_{k=1}^{n} k\right]$$

$$= \left[in + \cancel{2}\,\frac{n(n+1)}{\cancel{2}}\right] = \left[in + n(n+1)\right]$$

$$BA = \left[\sum_{k=1}^{n} (k + 2j)\right] = \left[\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 2j\right]$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2} + 2j \sum_{k=1}^{n} 1\right] = \left[\frac{n(n+1)}{2} + 2jn\right]$$

6

Väite: $AB = BA$, kun A ja B ovat saman kokoisia diagonaalimatriiseja

tod.

olk. A, B $n \times n$ diagonaalimatriiseja

$$A = [a_{ij}] \quad B = [b_{ij}]$$

siis $a_{xy} = b_{xy} = 0$, jokaiselle $x \neq y$

merk. $C_1 = AB = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right]$

$C_2 = BA = \left[\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} \right]$

kun $i \neq j$, niin $i \neq k$ tai $j \neq k$ jok. $k \in \mathbb{Z}$

joten $a_{ik} = 0$ tai $b_{jk} = 0$ jok. $k \in \mathbb{Z}$

edelleen $a_{ik} b_{kj} = 0$ jok. $k \in \{1, \ldots, n\}$

6 jatkuu

siis $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = 0$

jotka $c_{1ij} = 0$ eli c_1 diagonaalimatriisi

samoin c_2 diagonaalimatriisi

saadaan

$$c_{1ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}} \underbrace{a_{ik}}_{=0} \underbrace{b_{ki}}_{=0} + a_{ii} b_{ii} = 0 + a_{ii} b_{ii} = a_{ii} b_{ii}$$

samoin voidaan päätellä c_2:lle

eli $c_{2ii} = b_{ii} a_{ii} = a_{ii} b_{ii} = c_{1ii}$

joten $c_1 = c_2$

[redacted]

7

a) $a_{ij} = 1$, kun $|i-j| \leq 1$, $a_{ij} = 0$ muulloin

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \\ 0 & & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & & & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $a_{ij} = 1$ kun $i+j = n+1$ ja $a_{ij} = 0$ muulloin

$$n = 3: \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & & \vdots \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8

a) oletus matriisitulo $(AB)C$ on olemassa

väite matriisitulo $A(BC)$ on olemassa

tod. Nyt ol. $(AB)C$ on olemassa

joten AB on olemassa

siis A on $m \times n$ matriisi ja B on $n \times k$ matriisi

jollekin $m, n, k \in \mathbb{Z}'$

edelleen $(AB)C$ on olemassa, joten

C on $k \times l$ matriisi jollakin $l \in \mathbb{Z}'$

Nyt B on $n \times k$ matriisi ja C on $k \times l$ matriisi,

joten B on määr. ja on $n \times l$ matriisi

siis A on $m \times n$ matriisi ja BC on $n \times l$ matriisi

joten $A(BC)$ on olemassa

8 jatkuu

b) väite: matriisitulolle pätee

$(AB)C = A(BC)$ aina, kun tulot määritelty

tod. olk. A $m\times n$ -, B $n\times k$ ja $C_{k\times l}$ matriiseja

$$(AB)C = ([a_{ij}][b_{ij}])[c_{ij}]$$

$$= \left[\sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj}\right][c_{ij}]$$

$$= \left[\sum_{q=1}^{k}\left(\sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rq}\right) c_{qj}\right]$$

$$= \left[\sum_{q=1}^{k}\sum_{r=1}^{n}(a_{ir} b_{rq}) c_{qj}\right]$$

$$= \left[\sum_{q=1}^{k}\sum_{r=1}^{n} a_{ir}(b_{rq} c_{qj})\right]$$

$$= \left[\sum_{r=1}^{k}\sum_{q=1}^{n} a_{ir}(b_{rq} c_{qj})\right]$$

$$= \left[\sum_{r=1}^{k} a_{ir} \sum_{q=1}^{n} b_{rq} c_{qj}\right]$$

$$= [a_{ij}] \cdot \left[\sum_{q=1}^{r} b_{iq} c_{qj}\right]$$

$$= [a_{ij}] \cdot ([b_{ij}][c_{ij}])$$

$$= A(BC)$$