Lineaarialgebra 1A (2018), harjoitus 3, viikolla 5

1. Olkoon
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$
Laskettava $\det A$ a) manipuloimalla matriisi kolmiomatriisiksi b) soveltamalla muistisääntöä (lause 1.5.4).

2. Olkoon
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$
Laskettava matriisin A
   a) kofaktorit,
   b) determinantti kofaktoriesityksellä 1. rivin suhteen,
   c) käänteismatriisi (mikäli se on olemassa).

3. Määritä matriisien A ja B asteet, kun
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Olkoon
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$
Määritä a) $\det(A^3)$, b) $\det(A^0)$, c) $\det(A^{-1})$ (mikäli A^{-1} on olemassa). Vihje: Sovella tulon determinanttikaavaa.

5. Tutkittava, onko
   a) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$,
   b) $\det(kA) = k \det(A)$,
   c) $\det(A \bullet B) = \det(A) \det(B)$

   aina, kun A ja B ovat samankokoisia neliömatriiseja ja k on skalaari.
   (Tässä $A \bullet B$ on matriisien alkioittainen tulo, ks. viime viikon harjoitukset.)

6. Todista tulosääntö $\det(AB) = \det(A) \det(B)$, kun A ja B ovat 2×2-matriiseja.

7. Neliömatriisin A *jälki* $\mathrm{tr}(A)$ (engl. trace) on sen diagonaalialkioiden summa, ts. $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. Tutkittava, onko
   a) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$,
   b) $\mathrm{tr}(kA) = k\mathrm{tr}(A)$,
   c) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$

   aina, kun A ja B ovat samankokoisia neliömatriiseja ja k on skalaari.

8. Todista lause 1.5.5 induktiolla luvun n suhteen, kun A on $n \times n$-alakolmiomatriisi.