Lineaarialgebra 1A (2018), harjoitus 2, viikolla 4

1. Todista, että matriisi $\begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix}$ on rotaatiomatriisin $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ käänteismatriisi (sopivalla kertolaskulla).

2. Tarkastellaan (permutaatio)matriisia

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Laske P^TP ja PP^T.
b) Määritä matriisin P käänteismatriisi.

3. Laske potenssi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

WolframAlpha-ohjelmistolla tai muulla vastaavalla ohjelmistolla.
Ks. http://www.wolframalpha.com/examples/Matrices.html
Entä mikä on

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+?$$

4. a) Reaalialgebrassa yhtälöllä $a^2 = 1$ on täsmälleen kaksi ratkaisua $a = \pm 1$. Etsittävä kolme 2×2-matriisia A, jotka toteuttavat yhtälön $A^2 = I$.
b) Reaalialgebrassa on voimassa yhtälö $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$. Tutkittava, onko yhtälö

$$(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD$$

voimassa aina, kun A, B, C, D ovat samankokoisia neliömatriiseja.

5. Olkoot A ja B samankokoisia symmetrisiä matriiseja.
a) Todista, että $A + B$ on symmetrinen.
b) Todista, että A^{-1} on symmetrinen, kun A on kääntyvä (ja symmetrinen).

6. a) Todista lause 1.3.4 (2). b) Todista lause 1.3.8.

7. Todista induktiolla luvun $n = 1, 2, \ldots$ suhteen, että $(kA)^n = k^nA^n$, missä $k \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

8. Olkoot $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Niiden *Hadamardin tulo* (eli alkioittainen tulo) on

$$A \bullet B = [a_{ij}b_{ij}].$$

a) Etsittävä sellainen matriisi $E \in \mathbb{R}^{m\times n}$, että $A \bullet E = E \bullet A = A$ aina, kun $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
b) Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Millä ehdolla on olemassa sellainen $A' \in \mathbb{R}^{m\times n}$, että

$$A \bullet A' = A' \bullet A = E.$$

Mikä A' silloin on?