Lineaarialgebra 1A (2018), harjoitus 1,
viikolla 3 (18.-19.1.)

Huom. *Toivottavasti valitset/olet valinnut harjoitusryhmän kurssin kotisivujen kautta.*

1. Laskettava $A+B$, AB ja kA (mikäli se on määritelty), kun
   a)
   $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad k = -5,$$
   b)
   $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = 0.$$
2. a) Mitä voidaan sanoa matriisien A ja B kertaluvuista, jos tiedetään, että AB ja BA ovat kummatkin määriteltyjä?
   b) Mitä voidaan sanoa matriisien A ja B kertaluvuista, jos tiedetään, että $(AB)A$ on määritelty?
3. Merkitään
   $$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Olkoon $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$.
   a) Määritä PA.
   b) Määritä $P^2 (= PP)$.
   c) Määritä $P(PA)$.
   d) Määritä AP.
   (Matriisi P on esimerkki permutaatiomatriisista.)
4. Jatkoa edelliseen tehtävään:
   a) Laadi sellainen 3×3-matriisi Q, että QA on matriisi, jossa matriisin A ensimmäinen ja kolmas rivi ovat vaihtaneet paikkaa.
   b) Määritä AQ.
   c) Määritä PQ ja QP.
   d) Määritä $(PQ)A$ ja $(QP)A$.
5. Olkoon $A = [a_{ij}] = [i+2j]_{n\times n}$ ja $B = [b_{ij}] = [1]_{n\times n}$. Määritä $A+B$, $B+A$, AB ja BA.
6. Tutkittava, onko $AB = BA$ aina, kun A ja B ovat samankokoisia diagonaalimatriiseja. Muuttuuko vastaus, kun A on diagonaalimatriisi ja B on samankokoinen neliömatriisi?
7. Kirjoita matriisi A taulukkomuodossa, kun A sellainen $n \times n$-matriisi, että
   a) $a_{ij} = 1$, kun $|i-j| \leq 1$, ja $a_{ij} = 0$ muulloin,
   b) $a_{ij} = 1$, kun $i + j = n + 1$, ja $a_{ij} = 0$ muulloin,
   c) $a_{ij} = \min\{i, j\}$.
   (a-kohdassa on esimerkki tridiagonaalimatriisista, b-kohdassa antidiagonaalimatriisista ja c-kohdassa MIN-matriisista.)
8. a) Todista, että jos $(AB)C$ on olemassa, niin $A(BC)$ on olemassa.
   b) Todista matriisitulon assosiatiivisuus $(AB)C = A(BC)$
   (kun oletetaan, että ko. tulot ovat määriteltyjä).