Johdatus modaalilogiikkaan

Veikko Rantala – Ari Virtanen

Sisältö

1 Johdanto **4**
1.1 Modaalioperaattoreita . . . 4
1.2 Mahdollisen maailman käsitteestä . . . 6
1.3 Semantiikasta . . . 6
1.4 Todistusteoriasta . . . 9

2 L-semantiikka **12**
2.1 L-malli . . . 13
2.2 L-validisuus . . . 15
2.3 Looginen ekvivalenttisuus . . . 18

3 Todistus induktiolla kaavan pituuden suhteen **22**
3.1 Induktiivisia määritelmiä . . . 23
3.2 Korvaussääntö semanttisesti . . . 24

4 Kripke-semantiikka **26**
4.1 Kripke-mallit . . . 26
4.2 K-validisuus . . . 29
4.3 Modaalilogiikan tautologiat . . . 33

5 Modaalilogiikan systeemit **37**
5.1 Systeemi **K** . . . 38
5.2 Systeemit **T**, **S4** ja **S5** . . . 39
5.3 Kehyksen määräämä systeemi . . . 41
5.4 Modaliteetit . . . 42

6 Modaalilogiikan todistusteoriaa **47**
6.1 Luotettavuus ja täydellisyys . . . 47
6.2 Induktiotodistus deduktion pituuden suhteen . . . 48
6.3 Lauselogiikan aksiomatisoinnista osana modaalilogiikkaa . . . 49
6.4 Systeemi **K** . . . 49
6.5 Korvaussääntö . . . 53
6.6 Systeemin **K** laajennuksia . . . 54

7 Luotettavuus **57**

8 Korrespondenssiteoriaa **60**
8.1 Vastaavuustuloksia . . . 61
8.2 Bisimulaatio . . . 63
8.3 ”Vastaamattomuustuloksia” . . . 69

9 Täydellisyys **70**
9.1 Maksimaalinen ristiriidattomuus . . . 72
9.2 Kanoniset mallit ja systeemin **K** täydellisyystulos . . . 74
9.3 Erityisiä täydellisyystuloksia . . . 76
9.4 L- ja $S5$-mallien vastaavuus . . . 78

10 Äärelliset kehykset **79**
10.1 Filtraatio 80
10.2 Transitiiviset filtraatiot 86
10.3 Euklidiset filtraatiot 87

1 Johdanto

Sekä luonnollisessa kielessä että logiikassa on tosia lauseita, jotka voisivat olla epätosia, ja epätosia lauseita, jotka voisivat olla tosia. Tällaisten *kontingenttien* totuuksien lisäksi on *välttämättömiä* totuuksia. Muita modaalikäsitteitä eli modaliteetteja, ts. totuuden tai epätotuuden moduksia, ovat *mahdollisuus*, *mahdottomuus* ja *välttämätön seuraus*. Kaikki edellä mainitut ovat ns. aleettisia modaalikäsitteitä. Niiden merkityksiä on analysoitu filosofiassa ja täsmennetty modaalilogiikassa, jota voidaan tällöin kutsua *aleettiseksi modaalilogiikaksi*.

Jonkinlaiseen välttämättömyyden tai mahdollisuuden käsitteeseen viittaavat myös luonnollisen kielen ns. modaaliset apuverbit, kuten esimerkiksi verbien ”täytyä” ja ”voida” esiintymät. Modaaliverbeiksi katsotaan myös sellaiset *asenneverbit* kuin ”tietää”, ”uskoa”, ”toivoa”, ”kuvitella”, ”tahtoa”, ”nähdä” jne., kun ne ilmaisevat, että mieli on suuntautunut tai asennoitunut tietyllä tavalla johonkin kohteeseen. Erityisesti tietämistä tarkastelevaa logiikkaa kutsutaan *episteemiseksi logiikaksi* ja uskomista tutkivaa *doksastiseksi logiikaksi*.

Deonttisessa logiikassa tarkastellaan ilmausta ”täytyä” merkityksessä ”on pakollista” ja ilmausta ”saada” merkityksessä ”on sallittua”. *Teon logiikkakin* voidaan katsoa modaalilogiikan osa-alueeksi, sillä jonkin asian tekeminen voidaan käsittää modaliteetiksi. Myös *aikalogiikkaa* voidaan käsitellä analogisesti aleettisen modaalilogiikan kanssa. Siinä välttämättömyysoperaattoria vastaa kaksi operaattoria, joista toisen intuitiivinen merkitys on, että asiaintila vallitsee kaikkina tulevina ajankohtina, ja toisen, että asiaintila on vallinnut kaikkina menneinä ajankohtina. *Dynaamisessa logiikassa* tarkastellaan tietokoneohjelmien transformaatioita, jotka muuntavat tietokoneen tilan toiseksi. Siinä jokaiseen tietokoneohjelmaan ajatellaan liitetyksi mahdollisuus- ja välttämättömyysoperaattorin vastineet.

Materiaalinen implikaatio eli tavallinen lauselogiikan implikaatio on tosi, jos etulause on epätosi tai jälkilause tosi. Modaalilogiikassakin materiaalinen implikaatio on ”perusimplikaatio”, mutta voimme tarkastella myös sitä, milloin se on välttämättä tosi. Useimmat todet (materiaaliset) implikaatiot eivät ole välttämättä tosia. Modaalilogiikassa ilmausta ’on välttämätöntä, että jos. . . , niin. . . ’ kutsutaan *tiukaksi implikaatioksi*. Joissakin tapauksissa se vastaa materiaalista implikaatiota paremmin luonnollisen kielen ilmaisun ’jos. . . , niin. . . ’ totuusehtoja.

1.1 Modaalioperaattoreita

Esittelemme tässä alustavasti modaalioperaattoreiden formaalin merkintätavan. Oletamme, että lukija on perehtynyt lauselogiikan konnektiiveihin $\neg$ (negaatio), $\wedge$ (konjunktio), $\vee$ (disjunktio), $\rightarrow$ (implikaatio) ja $\leftrightarrow$ (ekvivalenssi). Kolme modaalilogiikan kannalta tärkeintä operaattoria viittaavat välttämättömyyden, mahdollisuuden ja tiukan implikaation käsitteisiin:

$\Box A$:	'välttämättä A', 'A on välttämättä tosi' tai 'A on välttämätön'; $\Box$ ("boksi") on *välttämättömyysoperaattori*;
$\Diamond A$:	'mahdollisesti A', 'A on mahdollisesti tosi' tai 'A on mahdollinen'; $\Diamond$ ("timantti") on *mahdollisuusoperaattori*;
$A \mathrel{-\!\!\Box\!\!\rightarrow} B$:	'A välttämättä implikoi B:n' tai 'A:sta seuraa B'; $\mathrel{-\!\!\Box\!\!\rightarrow}$ on *tiukka implikaatio.*

Nämä operaattorit voidaan määritellä toistensa avulla, kuten lukija voi huomata ajattelemalla niiden intuitiivisia merkityksiä. Koska lause on mahdollisesti tosi, ellei se ole välttämättä epätosi, voidaan määritellä

$$\Diamond A =_{df} \neg\Box\neg A.$$

Näin määriteltäessä $\Diamond$ katsotaan siis lyhennykseksi merkkiyhdistelmästä $\neg\Box\neg$. Perussymboliksi riittäisikin ottaa pelkkä välttämättömyysoperaattori. Toisaalta voidaan menetellä toisinkin päin ja määritellä operaattori $\Box$ operaattorin $\Diamond$ avulla:

$$\Box A =_{df} \neg\Diamond\neg A,$$

sillä lause on välttämättä tosi, jos ei ole mahdollista, että se on epätosi. Operaattoreita $\Box$ ja $\Diamond$ kutsutaan toistensa *duaaleiksi.*

Lause A välttämättä implikoi lauseen B, jos implikaatio $A \rightarrow B$ on välttämätön. Voidaan siis määritellä

$$A \mathrel{-\!\!\Box\!\!\rightarrow} B =_{df} \Box(A \rightarrow B).$$

Vaihtoehtoinen määritelmä on

$$A \mathrel{-\!\!\Box\!\!\rightarrow} B =_{df} \neg\Diamond(A \wedge \neg B)$$

eli tiukka implikaatio tarkoittaa, ettei ole mahdollista, että implikaation etulause on tosi mutta jälkilause epätosi.

Voimme myös määritellä muita modaalikäsitteitä (emme kuitenkaan ota niille käyttöön omia operaattoreita):

A on *mahdoton* $=_{df} \neg\Diamond A$,
A on *kontingentti* $=_{df} \Diamond A \wedge \Diamond\neg A$,
A ja B ovat *yhteensopivia* $=_{df} \Diamond(A \wedge B)$,
A ja B ovat *yhteensopimattomia* $=_{df} \neg\Diamond(A \wedge B)$.

Sulkeiden käytöstä

Sovimme, että kaavoissa voidaan uloimmat sulut jättää pois. Uloimpien sulkujen lisäksi voimme jättää pois sellaiset sulut, jotka eivät vaikuta konnektiivien vaikutusalaan, kun eri konnektiivien aloilla on alla esitetty keskinäinen järjestys:

- Negaation ja välttämättömyysoperaattorin ala on sitä välittömästi seuraava kaava.

- Konjunktiolla ja disjunktiolla on pienempi ala kuin implikaatiolla ja ekvivalenssilla.

Konjunktio samoin kuin disjunktio on liitännäinen eli esimerkiksi kaavat $A \wedge (B \wedge C)$ ja $(A \wedge B) \wedge C$ ovat merkitykseltään samat. Siksi voimme esittää ilman sulkuja *ketjudisjunktiot* ja *ketjukonjunktiot* eli kaavat, joissa esiintyy vain joko disjunktioita tai konjunktioita.

1.2 Mahdollisen maailman käsitteestä

Aristoteles oli ensimmäisiä modaalikäsitteiden ja niiden logiikan systemaattisia tutkijoita. Eräät tulkitsijat ovat väittäneet Aristoteleen kannattaneen *statistista* modaaliteoriaa, jonka mukaan

- jokin asia on mahdollinen, jos se toteutuu tällä tai jollakin tulevalla ajanhetkellä
- jokin asia on välttämätön, jos se toteutuu tällä ja jokaisella tulevalla ajanhetkellä.

Statistisen mahdollisuuden käsite ei johda loogisen mahdollisuuden käsitteeseen, sillä edellisen käsitteen mukaan mahdollisuudet toteutuvat ennemmin tai myöhemmin aktuaalisessa maailmassa.

Aristoteelinen tulkinta modaalikäsitteistä oli vallitsevana 1300-luvulle asti, jolloin Duns Scotus uudisti ratkaisevalla tavalla modaalikäsitteiden käsittelyä liittämällä ensimmäisen kerran modaalikäsitteisiin ajatuksen tarkastella loogisesti tai käsitteellisesti vaihtoehtoisia (rinnakkaisia) asiaintiloja. Yleensä kuitenkin G. W. Leibnizia on totuttu pitämään mahdollisen maailman idean isänä. Leibnizin voidaan tulkita määrittelevän kontingenssi ja välttämättömyys seuraavasti:

> Lause on kontingentti, jos sen totuus riippuu siitä, miten aktuaalinen maailma on.
>
> Lause on välttämätön, jos se on tosi kaikissa mahdollisissa maailmoissa; ts., jos sen totuus ei riipu siitä, mikä mahdollisista maailmoista on aktuaalinen.

Mahdollisuus voidaan vastaavasti määritellä näin:

> Lause on mahdollinen, jos se on tosi jossakin mahdollisessa maailmassa.

1.3 Semantiikasta

Erityisesti modaalikäsitteiden yhteydessä voidaan erottaa toisistaan *filosofinen semantiikka* ja *formaalinen* tai pikemminkin *joukko-opillinen semantiikka*. Filosofinen semantiikka antaa formaalin semantiikan perusideoille intuitiivisen taustan.

Leibnizin määritelmä voidaan muotoilla myös seuraavasti:

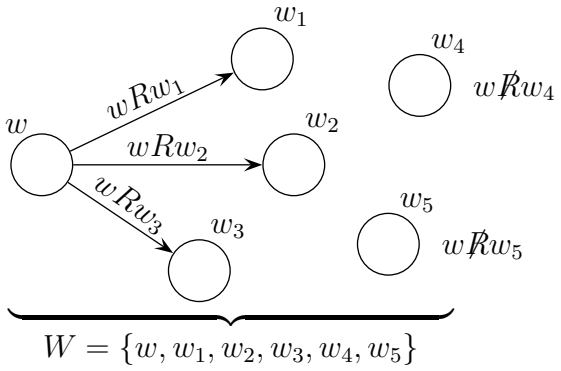
> Lause $\Box A$ on tosi, jos A on tosi kaikissa loogisesti mahdollisissa maailmoissa.
>
> Lause $\Diamond A$ on tosi, jos A on tosi jossakin loogisesti mahdollisessa maailmassa.

Kun alamme täsmentää tätä filosofista semantiikkaa formaaliksi semantiikaksi, meidän on ensiksi eliminoitava joukko-opin kannalta katsoen epämääräinen puhe ”kaikista mahdollisista maailmoista”. Ilmauksella ”mahdollinen maailma” emme tarkoita välttämättä maailmaa tavanomaisessa mielessä, vaan se voi viitata tarkoituksesta riippuen esimerkiksi

tilanteisiin (”situaatioihin”), asiaintiloihin, tapahtumakulkuihin, malleihin, struktuureihin tai systeemeihin. Sanan ”maailma” sijasta voimmekin käyttää jotakin muuta nimitystä, jos se tuntuu asianomaisessa yhteydessä luonnollisemmalta. Mahdolliset maailmat ovat siis (nimityksestään huolimatta) modaalilogiikan yhteydessä käsitteellisiä ja teoriapitoisia olioita, eivätkä metafyysisiä kuten esimerkiksi Leibnizilla. Formaalissa semantiikassa voimme menetellä yksinkertaisesti niin, että kussakin tarkastelukontekstissa sovimme, millaista mahdollisten maailmojen kokoelmaa käytämme.

Toiseksi, meidän on otettava kantaa siihen, miten käsitellä sisäkkäisiä modaalioperaattoreita sisältäviä kaavoja. Formaalissa logiikassa voidaan nimittäin muodostaa kaavoja, joissa on rajoittamaton (joskin äärellinen) määrä sisäkkäisiä modaalioperaattoreita. Voimme tutkia esimerkiksi kaavaa $\Box\Diamond\Box\Diamond A$, kun taas luonnollisessa kielessä ei ole mielekästä käyttää vastaavaa ilmausta. Periaatteessa edellä esitettyä filosofista semantiikkaa voidaan soveltaa sisäkkäisiin modaalioperaattoreihin etenemällä vaiheittain. Tällainen menettely herättää jo filosofisenkin semantiikan kohdalla kysymyksen siitä, onko se, mikä on mahdollista tietyssä maailmassa, samalla tavoin mahdollista myös muissa maailmoissa. Tuntuu luontevalta ajatella, että eri tilanteissa meillä on erilaisia vaihtoehtoja. Formaalissa semantiikassa voimme yksinkertaisesti sopia, mitkä mahdolliset maailmat ovat mahdollisia kullekin tarkasteltavalle maailmalle. Tällöin voimme tutkia myös tapauksia, joissa se, mikä on mahdollista, vaihtelee maailmasta toiseen.

Kun edellä esitetyt näkökulmat otetaan huomioon, päädytään *Kripke-kehykseksi* kutsuttavaan struktuuriin $\langle W, R\rangle$. Kripke-kehyksessä W voi olla mikä tahansa epätyhjä joukko ja R on (kaksipaikkainen) relaatio tässä joukossa. Joukko W vastaa filosofisen semantiikan ”kaikkia” mahdollisia maailmoja, ja kutsummekin W:n alkioita mahdollisiksi maailmoiksi, vaikka ne joukko-opin kannalta ovat mitä tahansa abstrakteja entiteettejä. Relaatio R määrittää kullekin maailmalle $w \in W$, mitkä maailmat ovat (loogisesti) *mahdollisia* w:n *suhteen*, eli mitkä maailmat ovat w:n *vaihtoehtoja*: jos w ja w' ovat relaatiossa R toisiinsa, jolloin merkitään wRw', niin w' on mahdollinen suhteessa w:hen eli w:n vaihtoehto. Voimme myös sanoa, että w' on *saavutettavissa* maailmasta w. Graafisesti tätä tilannetta voidaan kuvata kuvion 1 *digraafilla*, jossa R osoittaa kaikki w:n suhteen mahdolliset maailmat. Samalla tavalla voitaisiin osoittaa kuvion avulla ne maailmat, jotka



Kuvio 1:

ovat mahdollisia suhteessa mihin tahansa muuhun joukon W maailmaan.

Jos tutkimme modaalista lauselogiikkaa, niin liitämme vielä kehykseen *valuaation* P, joka liittää jokaiseen lausemuuttujaan eli atomilauseeseen ”totuusarvon” jokaisessa maailmassa $w \in W$. Toisin sanoen se ilmoittaa kustakin lausemuuttujasta p ja maailmasta w, onko p tosi vai epätosi w:ssä. Näin päädytään modaalisen lauselogiikan *Kripke-malliin*

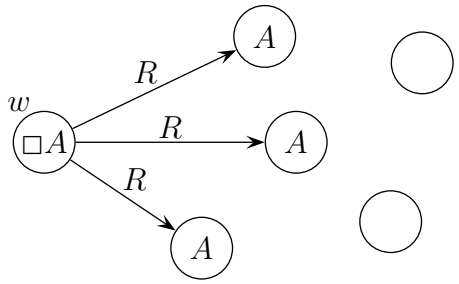
$M = \langle W, R, P \rangle$. Jos lause A on tosi mallin M maailmassa w, merkitsemme $M, w \vDash A$, ja jos epätosi, merkitsemme $M, w \nvDash A$. Jos kontekstista on selvää, missä mallissa M lauseiden totuusarvoja tarkastellaan, voidaan myös merkitä lyhyemin $w \vDash A$. Konnektiivien totuusehdot mahdollisessa maailmassa määritellään kuten tavallisessa lauselogiikassa; esimerkiksi:

$$M, w \vDash A \wedge B, \text{ jos } M, w \vDash A \text{ ja } M, w \vDash B;$$
$$M, w \vDash \neg A, \text{ jos } M, w \nvDash A.$$

Välttämättömyysoperaattorin totuusehto on seuraava:

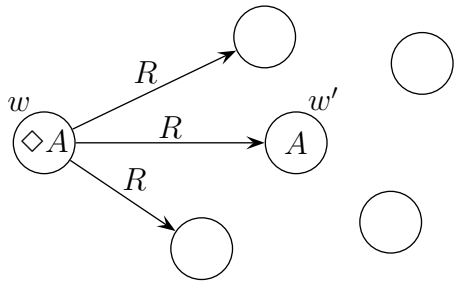
> $M, w \vDash \Box A$, jos A on tosi jokaisessa maailmassa $w' \in W$, joka on w:n vaihtoehto (siis jokaisessa maailmassa $w' \in W$, jolle wRw').

Näemme, ettei meidän tarvitse välittää tässä yhteydessä niistä mahdollisista maailmoista, jotka eivät ole mahdollisia maailman w suhteen.



Vastaavasti saamme mahdollisuusoperaattorille seuraavan totuusehdon:

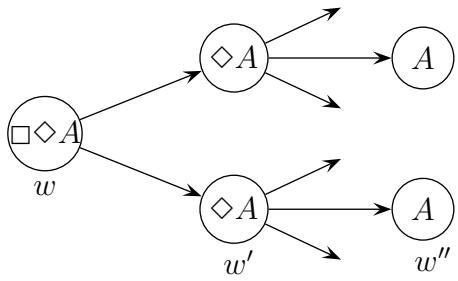
> $M, w \vDash \Diamond A$, jos A on tosi jossakin maailmassa $w' \in W$, joka on w:n vaihtoehto.



Näistä modaalioperaattoreiden totuusehdoista seuraa, että operaattorit $\Box$ ja $\Diamond$ suhtautuvat toisiinsa siten kuin edellä esitimme. Toisin sanoen, jos w on mikä tahansa maailma, niin

$$w \vDash \Box A, \text{ jos ja vain jos } w \vDash \neg\Diamond\neg A;$$
$$w \vDash \Diamond A, \text{ jos ja vain jos } w \vDash \neg\Box\neg A.$$

Nyt voimme tarkastella myös sisäkkäisiä modaalioperaattoreita sisältävien lauseiden totuutta. Tutkittaessa esimerkiksi kaavan $\Box\Diamond A$ totuusarvoa maailmassa $w \in W$ kysytään ensin, onko $\Diamond A$ tosi kaikissa niissä maailmoissa $w' \in W$, joille wRw'. Tämän selvittämiseksi tutkitaan, onko A tosi jossakin maailmassa $w'' \in W$, jolle $w'Rw''$. Nyt siis $w \vDash \Box\Diamond A$, jos ja vain jos aina, kun wRw', on olemassa sellainen maailma w'', että $w'Rw''$ ja $w'' \vDash A$:



Kripke-mallien vaihtoehtorelaatioilla voi olla tai olla olematta erilaisia relaation ominaisuuksia kuten vaikkapa refleksiivisyys, symmetrisyys ja transitiivisuus. Modaalioperaattoreiden (intuitiivinen) tulkinta ratkaisee joissakin tapauksissa sen, onko vaihtoehtorelaatiolta syytä edellyttää jokin ominaisuus vai ei. Toisaalta Kripke-semantiikkaa voidaan tutkia myös vertailemalla systemaattisesti modaalilogiikan kaavojen ja vaihtoehtorelaation ominaisuuksien välisiä yhteyksiä ilman, että edes annamme modaalioperaattoreille mitään intuitiivisia tulkintoja. Voimme esimerkiksi osoittaa, että kaava $\Box A \to A$ vastaa vaihtoehtorelaation refleksiivisyyttä. Tällaisten vastaavuuksien tutkimista kutsutaan *korrespondenssiteoriaksi*.

1.4 Todistusteoriasta

Tarkasteltaessa modaalilogiikkaa semanttisesti tutkitaan jossain mallissa tai mallien luokassa tosien kaavojen joukkoa. Voimme tarkastella modaalilogiikkaa myös *todistusteoreettisesti* eli *syntaktisesti*. Tällöin tutkitaan sellaisten kaavojen joukkoa, jotka ovat pääteltävissä annettujen periaatteiden avulla. Tarkastelemme seuraavaksi aksiomaattisia systeemejä yleisellä tasolla. Esittelemme käsitteet modaalilogiikan avulla, mutta ne olisivat vähäisin muutoksin sovellettavissa esimerkiksi lause- ja predikaattilogiikan aksiomatisointien tarkasteluihin.

Olkoon $\mathbf{L}$ kaikkien kaavojen joukko tarkastelemassamme modaalilogiikan kielessä. Modaalilogiikan *aksioomasysteemillä* tarkoitamme struktuuria $\mathcal{S} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$, jossa $\mathcal{A}$ on joukon $\mathbf{L}$ osajoukko ja $\mathcal{R}$ on joukko funktioita $\mathbf{L}^n \to \mathbf{L}$, $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Joukon $\mathcal{A}$ alkioita kutsumme *aksioomiksi* ja joukon $\mathcal{R}$ alkioita *päättelysäännöiksi*.

Aksioomat

Aksioomat voivat olla yksittäisiä kaavoja. Vaihtoehtoisesti aksioomat voidaan esittää aksioomaskeemoina käyttämällä niissä objektikielen atomikaavojen sijasta metavariaabeleja. Kun aksioomaskeemassa jokainen metavariaabeli korvataan järjestelmällisesti objektikielen kaavalla, saadaan (objektikieleen kuuluva) aksioomaskeeman instanssi.

Esimerkki 1. Aksioomaskeema

$$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B) \tag{K}$$

edustaa ääretöntä aksioomajoukkoa

$$\{\, \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B) \mid A \text{ ja } B \text{ ovat modaalilogiikan kaavoja} \,\}.$$

Tämän joukon alkiot, kuten esimerkiksi $\Box(p_1 \to p_2) \to (\Box p_1 \to \Box p_2)$, ovat aksioomaskeeman (K) instansseja.

Jotta aksiomatisointi olisi mielekäs, pitää aksioomien (tai aksioomaskeeman kaikkien instanssien) olla loogisesti tosia kaavoja. Tämän lisäksi joukolle $\mathcal{A}$ asetetaan yleensä seuraava ehto: kun on annettu kaava A, on oltava mahdollista (ainakin periaatteessa) selvittää, onko voimassa $A \in \mathcal{A}$. Aksioomien joukon on siis oltava *rekursiivinen* eli on oltava mahdollista esittää algoritmi, jonka avulla voidaan ratkaista kysymys joukon $\mathcal{A}$ alkioista. Kun aksioomia on vain äärellinen määrä, mitään ongelmia ei tämän suhteen ole. Sama koskee myös äärellistä määrää aksioomaskeemoja. Vaikka yhtä aksioomaskeema vastaakin ääretön määrä sen instansseja, voimme esimerkiksi muodostamalla kaavan rakennepuun todeta, onko se jonkin aksioomaskeeman instanssi vai ei.

Päättelysäännöt

Päättelysäännöt ilmaisevat yleensä, miten tietyistä skeemoista voidaan päätellä tietty skeema. Jos päättelysäännön r mukaan skeemoista A_1, A_2, ..., A_n voidaan päätellä skeema $r(A_1, A_2, \ldots, A_n) = B$, kyseinen päättelysääntö voidaan esittää seuraavasti:

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B} \qquad \text{tai} \qquad A_1, A_2, \ldots, A_n/B.$$

Päättelysääntöjen joukon $\mathcal{R}$ ja sen alkioiden $r \in \mathcal{R}$ edellytetään yleensä olevan aksioomien joukon tavoin rekursiivisia. Kun on annettu kaavat $B_1, \ldots, B_n, A$, on oltava siis mahdollista selvittää, onko olemassa sellaista päättelysääntöä $r \in \mathcal{R}$, että $r(B_1, \ldots, B_n) = A$.

Deduktio

Kaavan B *deduktio* eli *todistus* aksioomasysteemissä $\mathcal{S} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ on äärellinen jono kaavoja $B_1, \ldots, B_m$, jossa jonon viimeinen kaava $B_m = B$ ja jokainen jonon kaava B_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ toteuttaa jomman kumman seuraavista ehdoista:

- B_i on aksiooma, ts. $B_i \in \mathcal{A}$
- on olemassa sellainen päättelysääntö $r \in \mathcal{R}$, että $r(B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_k}) = B_i$, ja kaavat B_{i_1}, B_{i_2}, ..., B_{i_k} esiintyvät jonossa B_1, B_2, ..., B_i ennen kaavaa B_i.

Tällöin merkitään $\vdash_{\mathcal{S}} B$ ja kaavan B sanotaan olevan aksioomasysteemin $\mathcal{S}$ *teoreema*. Voimme sanoa tällöin myös, että B on *todistuva* tai *pääteltävissä* systeemissä $\mathcal{S}$. Jos kontekstista käy selville, että tarkoitamme aksioomasysteemiä $\mathcal{S}$ (tai mikäli ei ole väliä, mitä erityistä aksioomasysteemiä tarkastelemme), niin merkinnän "$\vdash_{\mathcal{S}}$" sijasta voimme käyttää lyhyttä merkintää "$\vdash$".

Aksioomasysteemin $\mathcal{S}$ määräämällä logiikalla $\mathbf{\Sigma}$ tarkoitetaan aksioomasysteemin $\mathcal{S}$ teoreemojen joukkoa: $\mathbf{\Sigma} = \{ A \mid \vdash_{\mathcal{S}} A \}$. Vaikka kahden aksioomasysteemin $\mathcal{S}_1$ ja $\mathcal{S}_2$ teoreemojen joukot olisivatkin samoja, teoreemojen aktuaaliset todistukset voivat olla varsin erilaisia näissä systeemeissä. Ääritapauksessa jokin kaava voi olla yhden aksioomasysteemin aksiooma (triviaalisti jokainen aksiooma on myös teoreema), mutta edellyttää toisessa aksioomasysteemissä hyvinkin pitkää ja monimutkaista deduktiota.

Tarkastelemissamme logiikoissa se, onko jokin kaava teoreema vai ei, riippuu vain kaavan loogisesta muodosta eikä esimerkiksi siitä, mitä kirjaimia on satuttu käyttämään siinä esiintyville atomikaavoille. Juuri tästä syystä aksioomat voidaan esittää aksioomaskeemoina. Jos aksioomaskeemoja ei käytetä, on asetettava yhdeksi päättelysäännöksi universaali substituutiosääntö (*US*) (ks. s. 37).

Deduktion käsite voidaan määritellä yleisemminkin ja puhua deduktiosta kaavajoukosta $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Tällöin kaavan B deduktiossa $B_1, B_2, \ldots, B_n = B$ saa esiintyä myös kaavoja A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Modaalilogiikassa käytetään kuitenkin esimerkiksi välttämättömyyssääntöä

$$\frac{A}{\Box A}, \tag{RN}$$

jota saa soveltaa vain teoreemoihin. Tämän päättelysäännön avulla saa siis päätellä teoreemasta $p \vee \neg p$ teoreeman $\Box(p \vee \neg p)$. Pelkästä oletuksesta p ei kuitenkaan saa päätellä teoreemaa $\Box p$. Tästä syystä tarkastelemme modaalilogiikassa vain sellaisia deduktioita, joissa ei käytetä ollenkaan oletuksia, ja määrittelemme, että kaava A on *johdettavissa aksioomasysteemissä* $\mathcal{S}$ *kaavajoukosta* Ω, jos $\vdash_{\mathcal{S}} A$ tai jos on olemassa sellaiset joukon Ω alkiot B_1, B_2, $\ldots$, B_n, että $\vdash_{\mathcal{S}} B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n \to A$.

2 L-semantiikka

Lauselogiikan kaavojen totuusarvoja *tosi* (t tai 1) ja *epätosi* (e tai 0) voidaan tutkia totuustaulumenetelmällä ottamalla lähtökohdaksi seuraavat tutut konnektiivien totuustaulut:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
t	t	e	t	t	t	t
t	e		e	t	e	e
e	t	t	e	t	t	e
e	e		e	e	t	t

Erilaiset semanttiset käsitteet voidaan määritellä lauselogiikassa viittaamalla totuustauluun. Jos kaavan A totuustaulun viimeiseksi saadussa pystyrivissä esiintyy vain totuusarvo t, kaavan A sanotaan olevan *tautologia*. Lauselogiikassa pätee, että

- kaava on loogisesti tosi, jos ja vain jos se on tautologia
- kaavat A ja B ovat loogisesti ekvivalentit, jos ja vain jos $A \leftrightarrow B$ on tautologia.

Lauselogiikassa voidaan muodostaa laskemalla totuustauluja, joissa totuusarvot määräytyvät yksikäsitteisesti alkuarvoista. Täten klassisen logiikan konnektiivit ovat *totuusfunktioita*. Modaalioperaattorit eivät kuitenkaan yleensä ole totuusfunktioita. Tarkastelemme esimerkkinä välttämättömyysoperaattoria. Tuntuu luontevalta ajatella, että lause ei voi olla välttämättä tosi, jos se ei ole itsessään tosi. Jos yritämme muodostaa operaattorin $\Box A$ totuustaulun, saamme siis seuraavan alun:

A	$\Box A$
t	?
e	e

Mutta mikä totuusarvo pitäisi asettaa kysymysmerkin tilalle? Jos A on vaikkapa lause 'Helsinki on Suomen pääkaupunki', joka on tosi, niin $\Box A$ on epätosi, sillä A on satunnaisesti tosi. Toisaalta, jos A on tosi lause 'Tampere on tai ei ole Suomen pääkaupunki', $\Box A$ onkin tosi, sillä nyt lauseen A totuus on loogisesti välttämätön. Kysymysmerkki edellä olevassa totuustaulussa pitäisi siis korvata sekä kirjaimella t että e. Tästä nähdään, ettei välttämättömyysoperaattorille voi esittää vastaavanlaista totuustaulua kuin konnektiiveille. Välttämättömyysoperaattori ei siis ole totuusfunktio. Sama pitää paikkansa muistakin modaalioperaattoreista. Tätä seikkaa pidetään usein sen merkkinä, ettei modaalilogiikka ole "ekstensionaalista" vaan "intensionaalista". Modaalilogiikan semantiikkaa ei voi siis kehitellä samalla tavalla totuustaulujen avulla kuin lauselogiikan semantiikkaa, vaan tarvitaan toisenlainen, modaalilogiikan intensionaalisen luonteen huomioiva semantiikka.

Ennen Kripke-semantiikan tarkempaa käsittelyä tarkastelemme yksinkertaistettua semantiikkaa, jossa jokainen maailma on jokaiselle toiselle maailmalle vaihtoehtoinen. Senkin formaali ja systemaattinen esitystapa on peräisin Kripkeltä, mutta sen perusidean voi katsoa olevan peräisin Leibnizilta. Käytämmekin tästä semantiikasta nimitystä L-semantiikka.

2.1 L-malli

L-malli M muodostuu epätyhjästä joukosta W ja kuvauksesta P, joka liittää jokaiseen lausemuuttujaan p_i joukon W osajoukon. Intuitiivisesti W tulkitaan *mahdollisten maailmojen joukoksi* ja kuvaus P ilmaisee, missä maailmoissa lausemuuttuja p_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ on tosi. Matemaattisesti ilmaistuna L-malli on järjestetty pari $\langle W, P\rangle$, jossa $W \neq \emptyset$ ja P on kuvaus joukolta $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ joukkoon $\mathcal{P}(W)$. Siis esimerkiksi $P(p_1) \subseteq W$ ja $w \in P(p_1)$, jos (ja vain jos) p_1 on tosi maailmassa w. Kun asiayhteydestä on selvää, että puhumme L-malleista, puhumme usein lyhyesti vain malleista. Käytämme luvussa 1.3 esiteltyjä merkintöjä "$M, w \vDash A$" ja "$M, w \nvDash A$" kaavan A totuudelle ja epätotuudelle mallin M maailmassa w. Voimme jättää usein mainitsematta mallin M ja käyttää lyhyempiä merkintöjä "$w \vDash A$" ja "$w \nvDash A$".

Esimerkki 2. Olkoon $M = \langle W, P\rangle$, jossa

$$\begin{array}{rcl} W & = & \{w_1, w_2, w_3, w_4\}, \\ P(p_1) & = & \{w_1\}, \\ P(p_2) & = & \emptyset, \\ P(p_3) & = & W \quad \text{ja} \\ P(p_i) & = & \{w_1, w_3\}, \quad \text{kun } i = 4, 5, 6, \ldots \end{array}$$

Mallissa M lausemuuttuja p_1 on tosi maailmassa w_1, sillä $w_1 \in P(p_1)$, mutta epätosi muissa maailmoissa; p_2 ei ole tosi missään maailmassa, p_3 on tosi jokaisessa maailmassa ja esimerkiksi p_4 on tosi maailmoissa w_1 ja w_3 ja epätosi maailmoissa w_2 ja w_4.

Kaavoissa esiintyy aina vain äärellinen määrä lausemuuttujia. Malleissa riittääkin esittää arvot $P(q)$ vain niiden lausemuuttujien q kohdalla, jotka esiintyvät kulloinkin tarkastelun kohteena olevissa kaavoissa.

Olkoon $M = \langle W, P\rangle$. Tällöin siis

$$M, w \vDash p_i \Leftrightarrow w \in P(p_i).$$

Lauselogiikan konnektiiveilla muodostettujen yhdistettyjen kaavojen totuudet määräytyvät mahdollisissa maailmoissa seuraavasti:

$$\begin{array}{rcl} M, w \vDash \neg A & \Leftrightarrow & M, w \nvDash A, \\ M, w \vDash A \wedge B & \Leftrightarrow & M, w \vDash A \text{ ja } M, w \vDash B, \\ M, w \vDash A \vee B & \Leftrightarrow & M, w \vDash A \text{ tai } M, w \vDash B, \\ M, w \vDash A \rightarrow B & \Leftrightarrow & M, w \nvDash A \text{ tai } M, w \vDash B, \\ M, w \vDash A \leftrightarrow B & \Leftrightarrow & \text{joko } M, w \vDash A \text{ ja } M, w \vDash B \\ & & \text{tai } M, w \nvDash A \text{ ja } M, w \nvDash B. \end{array}$$

Nämä konnektiivien totuusehdot vastaavat konnektiivien totuustauluja eli konnektiivien tavanmukaisia klassisia tulkintoja, ja kutsumme näitä totuusehtoja noudattavia maailmoja klassisiksi maailmoiksi. Konnektiivien totuusfunktionaalisuus eli ekstensionaalisuus ilmenee nyt siten, että yhdistetyn lauseen totuusarvo jossakin maailmassa riippuu vain sen alikaavojen totuudesta tässä samassa maailmassa, eikä alikaavojen totuusarvolla muissa maailmoissa ole merkitystä.

Esimerkki 3. Olkoon $M = \langle W, P\rangle$, jossa $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, $P(p) = \{w_1, w_3\}$ ja $P(q) = \{w_2, w_3\}$. Tällöin esimerkiksi

$$\begin{array}{lll} M, w_1 \vDash p, & M, w_1 \nvDash q, & M, w_1 \nvDash p \to q, \\ M, w_2 \nvDash p, & M, w_2 \vDash q, & M, w_2 \vDash p \vee q, \\ M, w_3 \vDash p, & M, w_3 \vDash q, & M, w_3 \vDash p \wedge q, \\ M, w_4 \nvDash p, & M, w_4 \nvDash q, & M, w_4 \vDash p \leftrightarrow q. \end{array}$$

Tämä tilanne voidaan esittää graafisesti:

w_1

p	$\neg q$
$p \vee q$	$\neg(p \wedge q)$
$\neg(p \to q)$	$\neg(p \leftrightarrow q)$

w_2

$\neg p$	q
$p \vee q$	$\neg(p \wedge q)$
$p \to q$	$\neg(p \leftrightarrow q)$

w_3

p	q
$p \vee q$	$p \wedge q$
$p \to q$	$p \leftrightarrow q$

w_4

$\neg p$	$\neg q$
$\neg(p \vee q)$	$\neg(p \wedge q)$
$p \to q$	$p \leftrightarrow q$

Kaavan A *totuusjoukolla* mallissa M tarkoitamme sitä mallin M mahdollisten maailmojen joukkoa, jossa kaava A on tosi. Tätä joukkoa $\{\, w \in W \mid M, w \vDash A \,\}$ kutsutaan myös kaavan A määräämäksi *propositioksi* mallissa M. Totuusjoukko riippuu siis mallista ja kaavasta. Käytämme sille merkintää $\|A\|^M$. Lausemuuttujaa p_i vastaava totuusjoukko $\|p_i\|^M$ mallissa $M = \langle W, P\rangle$ on $P(p_i)$. Kaavan A, joka ei ole lausemuuttuja, totuusjoukko saadaan joukko-opillisilla operaatioilla sen alikaavojen totuusjoukoista (harjoitustehtävä).

Esimerkki 4. Tarkastellaan esimerkin 3 mallia M. Seuraava taulukko esittää eräiden kaavojen totuusjoukkoja tässä mallissa.

kaava A	kaavan totuusjoukko $\|A\|^M$
p	$\{w_1, w_3\}$
q	$\{w_2, w_3\}$
$\neg p$	$\{w_2, w_4\}$
$\neg q$	$\{w_1, w_4\}$
$p \wedge q$	$\{w_3\}$
$p \vee q$	$\{w_1, w_2, w_3\}$
$p \to q$	$\{w_2, w_3, w_4\}$
$p \leftrightarrow q$	$\{w_3, w_4\}$

Kaavojen $\Box A$ ja $\Diamond A$ totuus maailmassa w riippuu kaavan A koko totuusjoukosta:

$$\begin{array}{ll} M, w \vDash \Box A & \Leftrightarrow \forall w' \in W\colon M, w' \vDash A, \\ M, w \vDash \Diamond A & \Leftrightarrow \exists w' \in W\colon M, w' \vDash A. \end{array}$$

Kaava $\Box A$ on siis tosi maailmassa w, jos ja vain jos kaava A on tosi jokaisessa mahdollisessa maailmassa, eli kun $\|A\|^M = W$. Kaava $\Diamond A$ on tosi maailmassa w, jos ja vain jos on olemassa ainakin yksi sellainen maailma $w' \in W$, jossa A on tosi, eli kun $\|A\|^M \neq \emptyset$. Nämä kaavojen $\Box A$ ja $\Diamond A$ totuusehdot vastaavat määritelmää $\Diamond A =_{df} \neg\Box\neg A$.

Totuusmääritelmämme perusteella kaavalla $\Box A$ on sama totuusarvo kaikissa mahdollisissa maailmoissa. Samoin on kaavan $\Diamond A$ kohdalla. Niiden totuusjoukot ovat aina joko kaikkien mahdollisten maailmojen joukko W tai tyhjä joukko $\emptyset$:

$$\begin{aligned} \|\Box A\|^M &= \begin{cases} W, & \text{jos } \|A\|^M = W, \\ \emptyset & \text{muulloin;} \end{cases} \\ \|\Diamond A\|^M &= \begin{cases} \emptyset, & \text{jos } \|A\|^M = \emptyset, \\ W & \text{muulloin.} \end{cases} \end{aligned}$$

Tämä yksinkertaistaa huomattavasti semanttisia tarkasteluja. Varsinaisessa Kripke-semantiikassa kaava $\Box A$ (ja $\Diamond A$) voi olla tosi jossakin maailmassa ja epätosi jossakin toisessa.

Esimerkki 5. Olkoon $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ ja olkoon $M = \langle W, P\rangle$ sellainen malli, että $\|A\|^M = W$, $\|B\|^M = \{w_1, w_2\}$ ja $\|C\|^M = \emptyset$. Tällöin

$$\|\Box A\|^M = W, \quad \|\Box B\|^M = \emptyset, \quad \|\Diamond B\|^M = W, \quad \|\Diamond C\|^M = \emptyset :$$

w_1: $A \quad B \quad \neg C$; $\Box A \quad \neg\Box B$; $\Diamond B \quad \neg\Diamond C$

w_2: $A \quad B \quad \neg C$; $\Box A \quad \neg\Box B$; $\Diamond B \quad \neg\Diamond C$

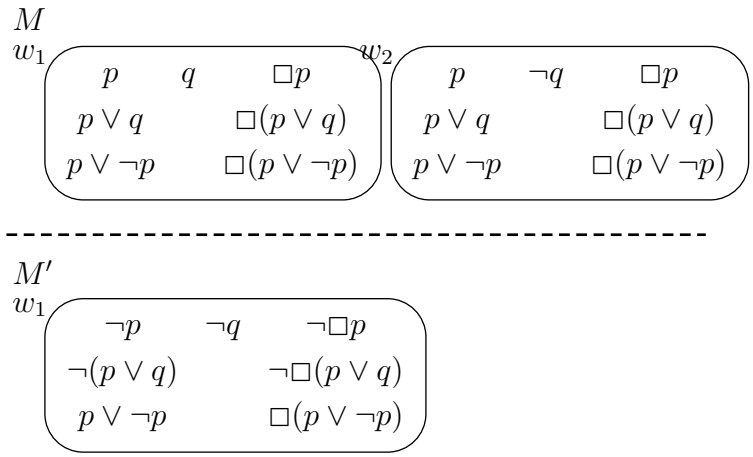
w_3: $A \quad \neg B \quad \neg C$; $\Box A \quad \neg\Box B$; $\Diamond B \quad \neg\Diamond C$

w_4: $A \quad \neg B \quad \neg C$; $\Box A \quad \neg\Box B$; $\Diamond B \quad \neg\Diamond C$

2.2 L-validisuus

Olkoon $M = \langle W, P\rangle$ L-malli. Jos $M, w \vDash A$ jokaisessa maailmassa $w \in W$ eli $\|A\|^M = W$, niin sanomme kaavan A olevan *validi mallissa* M ja merkitsemme $M \vDash A$. Jos A on validi jokaisessa L-mallissa M, niin sanomme kaavan A olevan *L-validi* ja merkitsemme $\vDash_L A$. Jos A ei ole validi mallissa M, merkitsemme $M \nvDash A$, ja jos A ei ole L-validi, merkitsemme $\nvDash_L A$.

Esimerkki 6. Olkoon $M = \langle W, P\rangle$, jossa $W = \{w_1, w_2\}$, $P(p) = \{w_1, w_2\}$ ja $P(q) = \{w_1\}$. Koska $M, w_1 \vDash p \vee q$ ja $M, w_2 \vDash p \vee q$, niin $M \vDash p \vee q$. Kaava $p \vee q$ on siis validi mallissa M. Muita mallissa M valideja kaavoja ovat mm. $\Box p$ ja $\Box(p \vee q)$. Toisaalta esimerkiksi mallissa $M' = \langle \{w_1\}, P'\rangle$, jossa $P'(p) = P'(q) = \emptyset$, pätee, että $M' \nvDash p \vee q$, $M' \nvDash \Box p$ ja $M' \nvDash \Box(p \vee q)$. Mikään kaavoista $p \vee q$, $\Box p$ ja $\Box(p \vee q)$ ei siis ole L-validi.

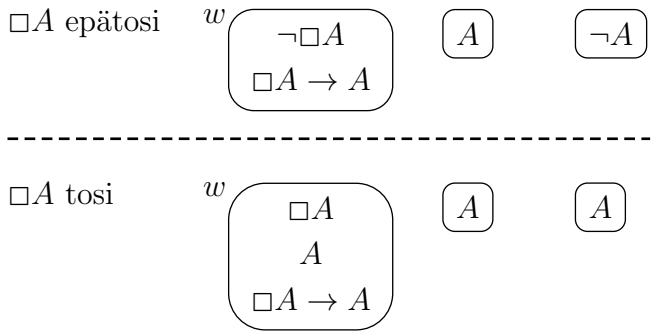


Kaava $p \vee \neg p$ sen sijaan on validi sekä mallissa M että M'. On helppo nähdä, että se on validi missä tahansa L-mallissa. Tautologia $p \vee \neg p$ on siis L-validi. Selvästi myös kaava $\Box(p \vee \neg p)$ on L-validi.

Esimerkki 7. Osoitamme L-validiksi kaavan

$$(T) \qquad \Box A \to A,$$

jossa A on mikä tahansa kaava. Olkoon $M = \langle W, P \rangle$ L-malli ja $w \in W$. Jos $M, w \nvDash \Box A$, niin implikaation totuusehtojen mukaan $M, w \vDash \Box A \to A$. Jos taas $M, w \vDash \Box A$, niin $M, w' \vDash A$ aina, kun $w' \in W$. Erityisesti valitsemalla $w' = w$ saadaan, että $M, w \vDash A$. Tällöinkin siis $M, w \vDash \Box A \to A$. Koska $w \in W$ on tässä mielivaltainen, niin $M \vDash \Box A \to A$. Koska myöskään L-mallista M ei oletettu mitään erityistä, niin $\vDash_L \Box A \to A$.



Esimerkin 6 yhteydessä totesimme, että kolmannen poissuljetun laki $p \vee \neg p$ on L-validi. Seuraavassa esimerkissä tarkastelemme de Morganin säännön mukaista tautologiaa.

Esimerkki 8. Osoitamme kaavan $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ validiksi. Olkoon $M = \langle W, P \rangle$ L-malli ja $w \in W$.

Oletamme ensin, että $M, w \vDash \neg(A \wedge B)$. Siis $M, w \nvDash A \wedge B$, joten $M, w \nvDash A$ tai $M, w \nvDash B$. Siis $M, w \vDash \neg A$ tai $M, w \vDash \neg B$. Täten $M, w \vDash \neg A \vee \neg B$.

Oletamme sitten, että $M, w \nvDash \neg(A \wedge B)$. Siis $M, w \vDash A \wedge B$ eli $M, w \vDash A$ ja $M, w \vDash B$. Täten $M, w \nvDash \neg A$ ja $M, w \nvDash \neg B$. Tästä seuraa, että $M, w \nvDash \neg A \vee \neg B$. (Tässä olisi voinut olettaa vaihtoehtoisesti, että $M, w \vDash \neg A \vee \neg B$, ja todistaa väite $M, w \vDash \neg(A \wedge B)$.)

Tautologiat ovat tosia jokaisessa (klassisessa) mahdollisessa maailmassa, joten ne ovat L-valideja:

Lause 1. *Jos A on tautologia, niin A on L-validi.*

Emme todista tässä yleisesti, että jokainen tautologia on (L-)validi, vaan tyydymme havainnollistamaan sitä, miten tämä voitaisiin perustella. Pyrittäessä osoittamaan kaavaa $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ validiksi olisi mahdollista edetä myös suoraviivaisemmin kuin edellä. Voisimme tutkia neljää eri mahdollisuutta,

$$\begin{array}{lll} M, w \vDash A & \text{ja} & M, w \vDash B, \\ M, w \vDash A & \text{ja} & M, w \nvDash B, \\ M, w \nvDash A & \text{ja} & M, w \vDash B, \\ M, w \nvDash A & \text{ja} & M, w \nvDash B, \end{array}$$

ja todeta, että kaikissa tapauksissa

$$M, w \vDash \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B.$$

Yleistäen voidaan todeta, että annetussa kaavassa A esiintyvät lausemuuttujat q_1, q_2, ..., q_k sallivat 2^k erilaista totuusarvoyhdistelmää jossakin maailmassa w. Kaavan A totuusarvo maailmassa w määräytyy yksikäsitteisesti näistä totuusarvoista. Jokainen totuusarvoyhdistelmä vastaa yhtä vaakariviä 2^k riviä sisältävässä totuustaulussa. On intuitiivisesti selvää, että jos A on tautologia, niin esimerkiksi tällä tavoin menetellen on mahdollista osoittaa A validiksi kaavaksi. Myöhemmin esitämme täsmällisen todistuksen sille, että tautologiat ovat valideja myös yleisemmin Kripke-semantiikassa.

Esimerkissä 6 totesimme, että kaava $p \vee \neg p$ on validi. Se on siis tosi jokaisessa maailmassa ja täten myös kaava $\Box(p \vee \neg p)$ on L-validi. Päättelyä voidaan jatkaa edelleen: $\Box\Box(p \vee \neg p)$, $\Box\Box\Box(p \vee \neg p)$ jne. ovat L-valideja. Yleisesti onkin voimassa seuraava lause.

Lause 2. *Jos A on L-validi, niin myös $\Box A$ on L-validi.*

Todistus. Olkoon $M = \langle W, P \rangle$ L-malli ja $w \in W$. Koska A on validi, niin $M, w' \vDash A$ aina, kun $w' \in W$. Siis $M, w \vDash \Box A$. Täten $\vDash_L \Box A$. $\Box$

Tämä ja seuraava tulos ovat yleisesti voimassa myös Kripke-semantiikassa.

Lause 3. *Kaava*

$$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B) \tag{K}$$

on L-validi.

Todistus. Olkoon $M = \langle W, P \rangle$ L-malli ja $w \in W$. Jos $M, w \nvDash \Box(A \to B)$, niin (K):n implikaatio on tosi. Jos $M, w \nvDash \Box A$, niin $M, w \vDash \Box A \to \Box B$ ja tällöinkin (K):n implikaatio on tosi.

Oletamme sitten, että $M, w \vDash \Box(A \to B)$ ja $M, w \vDash \Box A$. Olkoon $w' \in W$. Tällöin $M, w' \vDash A \to B$ ja $M, w' \vDash A$. Implikaation totuusehdon perusteella $M, w' \vDash B$. Siis $M, w \vDash \Box B$. Täten

$$\vDash_L \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B).$$

$\Box$

Osoitamme seuraavaksi muutaman implikaation L-validiksi. Todistettaessa implikaatiota $A \to B$ validiksi voidaan olettaa rajoituksetta, että $M, w \vDash A$. Jos nimittäin $M, w \nvDash A$, niin implikaation totuusehtojen perusteella $M, w \vDash A \to B$. (Yllä esitetyssäkin todistuksessa olisimme voineet olettaa suoraan, että $M, w \vDash \Box(A \to B)$ ja $M, w \vDash \Box A$.)

Lause 4. *Alla olevat kaavat ovat L-valideja:*

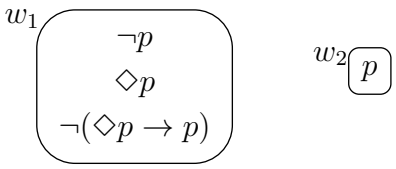
$$\Box A \to \Diamond A, \tag{D}$$
$$\Box A \to A, \tag{T}$$
$$A \to \Box\Diamond A, \tag{B}$$
$$\Box A \to \Box\Box A, \tag{4}$$
$$\Diamond A \to \Box\Diamond A. \tag{5}$$

Todistus. Olkoon $M = \langle W, P\rangle$ ja $w \in W$. Kaava (D): Oletamme, että $M, w \vDash \Box A$; siis $M \vDash A$, ja täten triviaalisti $\exists w' \in W : M, w' \vDash A$; siis $M, w \vDash \Diamond A$. Kaava (T) on todistettu validiksi esimerkissä 7. Kaava (B): Oletamme, että $M, w \vDash A$; tällöin $M, w' \vDash \Diamond A$ aina, kun $w' \in W$; siis $M, w \vDash \Box\Diamond A$. Kaavat (4) ja (5): harjoitustehtävä. $\Box$

Systeemi S5

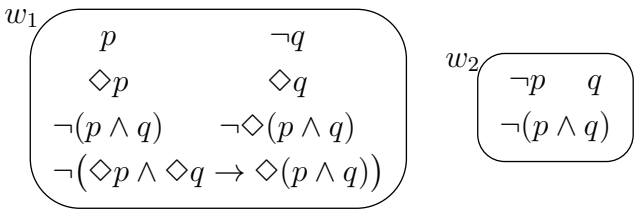
Kutsumme kaikkien L-validien kaavojen muodostamaa joukkoa $\{\, A \mid \vDash_{\mathrm{L}} A \,\}$ systeemiksi **S5** (vrt. s. 40). Systeemi **S5** sisältää siis esimerkiksi kaikki tautologiat, sekä kaikki lauseiden 3 ja 4 mukaiset kaavat. Jos jokin kaava A kuuluu systeemiin **S5**, niin lauseen 2 perusteella myös kaava $\Box A$ kuuluu systeemiin **S5**. Siten esimerkiksi $\Box(\Box p \to p)$, $\Box\Box(\Box p \to p)$ jne. kuuluvat systeemiin **S5**. Tarkastelemme lopuksi paria esimerkkiä kaavoista, jotka eivät ole L-valideja eivätkä siis kuulu systeemiin **S5**.

Esimerkki 9. Olkoon $W = \{w_1, w_2\}$, $P(p) = \{w_2\}$.



Tällöin $M, w_2 \vDash p$ ja täten $M, w_1 \vDash \Diamond p$. Mutta $M, w_1 \nvDash p$. Siis $M, w_1 \nvDash \Diamond p \to p$, joten $\nvDash_L \Diamond p \to p$.

Esimerkki 10. Olkoon $W = \{w_1, w_2\}$, $P(p) = \{w_1\}$, $P(q) = \{w_2\}$.



Tällöin $M, w_1 \vDash p$ ja $M, w_2 \vDash q$, joten $M, w_1 \vDash \Diamond p$ ja $M, w_1 \vDash \Diamond q$. Toisaalta $M, w_1 \nvDash p \wedge q$ ja $M, w_2 \nvDash p \wedge q$, joten $M, w_1 \nvDash \Diamond(p \wedge q)$. Siis $M, w_1 \nvDash \Diamond p \wedge \Diamond q \to \Diamond(p \wedge q)$ ja täten $\nvDash_L \Diamond p \wedge \Diamond q \to \Diamond(p \wedge q)$.

2.3 Looginen ekvivalenttisuus

Jos ekvivalenssi $A \leftrightarrow B$ on L-validi, sanomme kaavojen A ja B olevan loogisesti L-ekvivalentteja ja merkitsemme $A \equiv_{\mathrm{L}} B$. Yksinkertaisuuden vuoksi alaindeksin voi tästä

jättää pois, jos asiayhteydestä on selvää, että käsitellään L-semantiikkaan tai jos esitetyt tulokset pätevät yleisesti myös Kripke-semantiikassa (tai vielä yleisemmin).

Kuten johdannossa totesimme, operaattori $\Diamond$ määritellään usein operaattorin $\Box$ duaalioperaattoriksi. Valitsimme kuitenkin kielemme perussymboleiksi sekä operaattorin $\Box$ että operaattorin $\Diamond$, joten meidän pitää todistaa tätä määritelmää vastaava looginen ekvivalenttisuus.

Lause 5. *Olkoon A kaava. Tällöin*

$$\Diamond A \equiv_{\mathrm{L}} \neg\Box\neg A \qquad \textit{ja} \qquad \Box A \equiv_{\mathrm{L}} \neg\Diamond\neg A.$$

Todistus. Olkoon $M = \langle W, P\rangle$ L-malli ja $w \in W$. Oletamme ensin, että $w \vDash \Diamond A$. Jossakin maailmassa siis $w' \vDash A$. Mutta tällöin $w' \nvDash \neg A$, joten $w \nvDash \Box\neg A$ eli $w \vDash \neg\Box\neg A$.

Oletamme sitten, että $w \vDash \neg\Box\neg A$. Täten ei voi olla niin, että kaikissa maailmoissa $w' \vDash \neg A$. Koska siis ainakin yhdessä maailmassa $w' \vDash A$, niin $w \vDash \Diamond A$.

Olemme näin osoittaneet, että $M, w \vDash \Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$. Koska mallista M ja maailmasta w ei oletettu mitään erityistä, niin täten $\Diamond A \equiv \neg\Box\neg A$. Vastaavaan tapaan osoitetaan, että $\Box A \equiv \neg\Diamond\neg A$ (harjoitustehtävä). $\Box$

Seuraavan lauseen todistuksen jätämme harjoitustehtäväksi.

Lause 6. *Jos $A \equiv_{\mathrm{L}} B$, niin $\|A\|^M = \|B\|^M$ jokaisessa L-mallissa M. Kääntäen, jos jokaisessa L-mallissa M pätee, että $\|A\|^M = \|B\|^M$, niin $A \equiv_{\mathrm{L}} B$.*

Alla olevat tulokset pätevät L- ja Kripke-semantiikan lisäksi myös ei-modaaliselle lause- ja predikaattilogiikalle (lauselogiikassa looginen ekvivalenttisuus tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että vastaava ekvivalenssi on tautologia).

Lause 7. *Looginen ekvivalenttisuus on ekvivalenssirelaatio:*

$$\begin{gathered} A \equiv A \textit{ aina, kun } A \textit{ on kaava;} \\ \textit{jos } A \equiv B, \textit{ niin } B \equiv A; \\ \textit{jos } A \equiv B \textit{ ja } B \equiv C, \textit{ niin } A \equiv C. \end{gathered}$$

Looginen ekvivalenttisuus on siis refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen relaatio kaavojen joukossa. Transitiivisuus yleistyy muotoon

$$\text{jos} \quad A_1 \equiv A_2,\ A_2 \equiv A_3, \ldots,\ A_{k-1} \equiv A_k, \quad \text{niin} \quad A_1 \equiv A_k.$$

Tämä oikeuttaa kaavojen vaiheittaisen muuntamisen ekvivalenttiin muotoon. Pyrittäessä osoittamaan, että kaavat A_1 ja A_k ovat loogisesti ekvivalentteja, etsitään sopivia välittäviä kaavoja A_i, $(1 < i < k)$ esimerkiksi lauselogiikan ekvivalenttisuuksien tai seuraavien modaalilogiikan ekvivalenttisuuksien avulla:

$$\neg\Diamond A \equiv \Box\neg A, \qquad \neg\Box A \equiv \Diamond\neg A.$$

Voimme todistaa nämä kaksi sääntöä toteamalla, että

$$\neg\Diamond A \equiv \neg\neg\Box\neg A \equiv \Box\neg A$$

ja

$$\neg\Box A \equiv \neg\Box\neg\neg A \equiv \Diamond\neg A.$$

Siis negaation voi siirtää modaalioperaattorin $\Box$ ja $\Diamond$ yli, jos muuttaa modaalioperaattorin toiseksi. Nämä modaalilogiikan loogiset ekvivalenttisuudet ovat analogisia predikaattilogiikan tuloksille

$$\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x) \qquad \text{ja} \qquad \neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x).$$

Esimerkki 11.

$$\begin{gathered}\neg\Box\Box\Diamond\Box A \equiv \Diamond\neg\Box\Diamond\Box A \equiv \cdots \equiv \Diamond\Diamond\Box\Diamond\neg A,\\ \neg\Box(A \vee B) \equiv \Diamond\neg(A \vee B) \equiv \Diamond(\neg A \wedge \neg B),\\ \neg\Diamond(A \to B) \equiv \Box\neg(A \to B) \equiv \Box\neg\neg(A \wedge \neg B) \equiv \Box(A \wedge \neg B).\end{gathered}$$

Kun totesimme edellä, että $\neg\Box A \equiv \neg\Box\neg\neg A$, käytimme hyväksi tietoa, että alikaavat A ja $\neg\neg A$ ovat loogisesti ekvivalentteja (lauselogiikassa). Määrittelemme myöhemmin täsmällisesti alikaavan käsitteen, mutta intuitiivisesti on ilmeistä, mitä sillä tarkoitetaan.

Ennen ns. korvaussäännön esittelyä luonnehdimme, mitä sijoituksella tarkoitetaan logiikassa. (Myöhemmin sijoituksen käsite määritellään täsmällisemmin:) Olkoon A kaava, jossa mahdollisesti esiintyy lausemuuttuja p (eli p on mahdollisesti A:n alikaava). Tällöin voidaan merkitä $A = A[p]$. Jos B on kaava, niin $A[p/B]$ tarkoittaa kaavaa, joka saadaan kaavasta A korvaamalla siinä jokainen lausemuuttujan p esiintymä kaavalla B. Jos p ei esiinny kaavassa A, sijoitus on tyhjä ja saadaan kaava A itse. Sijoituksella $A[q_1/B_1, q_2/B_2, \ldots, q_k/B_k]$ tarkoitetaan kaavaa, joka saadaan kaavasta $A = A[q_1, q_2, \ldots, q_k]$ korvaamalla samanaikaisesti jokainen lausemuuttujan q_i esiintymä kaavalla B_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Sijoitus voidaan määritellä myös yleisemmin siten, että lausemuuttujien sijasta korvataan muitakin alikaavoja.

Edellä on kaavoja muunneltaessa sovellettu periaatetta

$$D \equiv E \Rightarrow A[p/D] \equiv A[p/E],$$

jota kutsumme *korvaussäännöksi* (*rule of replacement*, *REP*). Todistamme tämän menettelyn myöhemmin oikeutetuksi (lauseessa 8 s. 24).

L-semantiikan mukaan A on välttämättä tosi, jos A on tosi kaikissa maailmoissa. Tämä tarkoittaa sitä, että jos $\Box A$ on tosi maailmassa w, niin se on tosi jokaisessa muussakin maailmassa. Mutta tällöin myös $\Box\Box A$ on tosi maailmassa w (ja myös kaikissa muissa maailmoissa). Kääntäen, jos $\Box\Box A$ on tosi maailmassa w, niin $\Box A$ on tosi kaikissa maailmoissa ja siis erityisesti myös maailmassa w. Koska siis $M, w \vDash \Box A$, jos ja vain jos $M, w \vDash \Box\Box A$, niin

$$\Box A \equiv_L \Box\Box A.$$

Koska lause on L-semantiikan mukaan mahdollisesti tosi, jos se on tosi ainakin yhdessä maailmassa, saamme (harjoitustehtävä) myös seuraavat ekvivalenttisuudet:

$$\Diamond\Diamond A \equiv_L \Diamond A, \qquad \Box\Diamond A \equiv_L \Diamond A, \qquad \Diamond\Box A \equiv_L \Box A.$$

Induktiolla ”boksien” ja ”timanttien” lukumäärän suhteen on helppo todistaa, että

$$\underbrace{\Box\Box\cdots\Box}_{k\ \text{kpl}} A \equiv_L \underbrace{\Box\Box\cdots\Box}_{k-1\ \text{kpl}} A \equiv_L \cdots \equiv_L \Box A.$$

ja

$$\Diamond\Diamond\cdots\Diamond A \equiv_L \Diamond A.$$

Yleisemmin mikä tahansa peräkkäinen jono bokseja ja timantteja ”sievenee” yhdeksi bokseiksi tai yhdeksi timantiksi. L-semantiikassa peräkkäisten modaalioperaattoreiden käsitteleminen onkin paljon yksinkertaisempaa kuin Kripke-semantiikassa.

Sekä L-semantiikassa että Kripke-semantiikassa pätee, että $\Box(A \wedge B) \equiv \Box A \wedge \Box B$. Seuraavassa esimerkissä yleistämme tämän kaavan induktiolla.

Esimerkki 12. Oletetaan tunnetuksi, että $\Box(A_1 \wedge A_2) \equiv \Box A_1 \wedge \Box A_2$. Osoitamme induktiolla luvun n suhteen, että yleisemmin

$$\Box(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \equiv \Box A_1 \wedge \Box A_2 \wedge \cdots \wedge \Box A_n.$$

Väite on siis voimassa, kun $n = 2$. Teemme induktio-oletuksen, että se on voimassa, kun $n = k \geq 2$. Tällöin siis

$$\begin{aligned}
&\Box(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A_{k+1}) \\
&\qquad \equiv \Box\big((A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \wedge A_{k+1}\big) \\
&\qquad \overset{n=2}{\equiv} \Box(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \wedge \Box A_{k+1} \\
&\qquad \overset{\text{I.O.}}{\equiv} (\Box A_1 \wedge \Box A_2 \wedge \cdots \wedge \Box A_k) \wedge \Box A_{k+1} \\
&\qquad \equiv \Box A_1 \wedge \Box A_2 \wedge \cdots \wedge \Box A_k \wedge \Box A_{k+1}.
\end{aligned}$$

Huomaa, että tässä käytimme hyväksi myös korvaussääntöä ja tietoa konjunktion liitännäisyydestä.

3 Todistus induktiolla kaavan pituuden suhteen

Logiikassa sovelletaan induktiotodistuksen periaatetta usealla tavalla. Edellä käytimme tavanmukaista luonnollisten lukujen induktioperiaatetta. Käsittelemme tässä induktiota kaavan pituuden suhteen ja myöhemmin esittelemme induktiotodistuksen deduktion pituuden suhteen.

Induktiotodistukset kaavan pituuden suhteen edellyttävät, että modaalilogiikan kieli on täsmällisesti määritelty. Todistusten lyhentämiseksi kannattaa rajoittua jatkossa tarkastelemaan kieltä, jonka perussymboleina ovat sulkujen ja lausemuuttujien lisäksi vain konnektiivit $\neg$ ja $\wedge$ sekä välttämättömyysoperaattori $\Box$. Tämän kielen kaavanmuodostussäännöt ovat seuraavat:

1. Lausemuuttujat p_1, p_2, $p_3, \ldots$ ovat kaavoja.
2. Jos A on kaava, niin $\neg A$ on kaava.
3. Jos A on kaava, niin $\Box A$ on kaava.
4. Jos A ja B ovat kaavoja, niin $(A \wedge B)$ on kaava.
5. Muita kaavoja ei ole.

Mahdollisuusoperaattorin $\Diamond$ ja lauselogiikan muut konnektiivit määrittelemme seuraavasti:

$$\begin{array}{rcl} \Diamond A & =_{def} & \neg\Box\neg A, \\ A \vee B & =_{def} & \neg(\neg A \wedge \neg B), \\ A \rightarrow B & =_{def} & \neg(A \wedge \neg B), \\ A \leftrightarrow B & =_{def} & \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(B \wedge \neg A). \end{array}$$

Kun haluamme todistaa, että kaikilla modaalilogiikan kaavoilla on jokin ominaisuus $\mathcal{O}$, kaavanmuodostussäännöt oikeuttavat seuraavan todistustekniikan, jota kutsutaan *induktioksi kaavan pituuden suhteen*:

1. Osoitetaan, että lausemuuttujilla on ominaisuus $\mathcal{O}$.
2. Tehdään *induktio-oletus*, että kaavoilla A ja B on ominaisuus $\mathcal{O}$ ja osoitetaan *induktioaskeleessa*, että
   (a) kaavalla $\neg A$ on ominaisuus $\mathcal{O}$,
   (b) kaavalla $\Box A$ on ominaisuus $\mathcal{O}$,
   (c) kaavalla $A \wedge B$ on ominaisuus $\mathcal{O}$.
3. *Induktioperiaatteen* mukaisesti tällöin voidaan todeta, että kaikilla kaavoilla on ominaisuus $\mathcal{O}$.

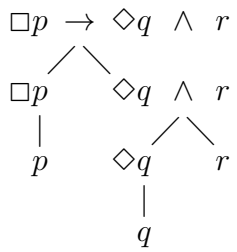
Sen lisäksi, että kielen induktiivinen eli *rekursiivinen* määrittely oikeuttaa induktiolla tapahtuvat todistukset, se myös mahdollistaa monen loogisen käsitteen rekursiivisen määrittelemisen.

3.1 Induktiivisia määritelmiä

Totuusmääritelmät ovat tyyppiesimerkkejä induktiivisista määritelmistä. Totuuden lisäksi myös useimmat muut logiikan peruskäsitteet voidaan määritellä induktiivisesti.

Kun A on jokin lausemuuttujasta poikkeava kaava, niin se muodostuu osista, joita kutsutaan kaavan A *alikaavoiksi*. Jos nämä alikaavat eivät ole lausemuuttujia, niin voidaan edelleen muodostaa niiden alikaavat jne. Myös kaavaa itseään kutsutaan itsensä alikaavaksi ja alikaavojen alikaavat tulkitaan myös alkuperäisen kaavan alikaavoiksi. Tätä prosessia, jossa lähdetään liikkeelle kaavasta A ja etsitään sen kaikki alikaavat päätyen lopulta kaavassa esiintyviin lausemuuttujiin, voidaan havainnollistaa kaavan *rakennepuulla*. Rakennepuu muodostetaan ylhäältä alaspäin aloittaen kaavasta A, mutta valmista rakennepuuta voidaan lukea myös alhaalta ylöspäin, jolloin nähdään, miten kaava A on muodostettu vaihe vaiheelta kaavanmuodostussääntöjen avulla lausemuuttujista aloittamalla. Seuraavissa rakennepuissa on kaavoista jätetty pois kaikki ne sulut, jotka tehtyjen sopimusten perusteella voidaan jättää pois.

Esimerkki 13. Kaavan $A = \big(\Box p \to (\Diamond q \wedge r)\big)$ rakennepuu on seuraava:

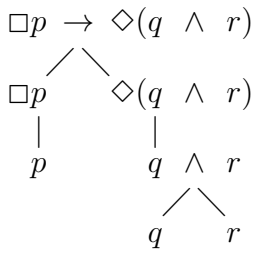


Kaavan A alikaavat ovat siis kaava A itse, $\Box p$, $\Diamond q \wedge r$, kaavan $\Box p$ alikaava p, kaavan $\Diamond q \wedge r$ alikaavat r ja $\Diamond q$ sekä jälkimmäisen alikaava q.

Näemme rakennepuusta myös, miten kaavanmuodostussääntöjen avulla voidaan osoittaa kaavan A todella olevan kaava:

1. Koska q on kaava, $\Diamond q$ on kaava.
2. Koska r ja $\Diamond q$ ovat kaavoja, $\Diamond q \wedge r$ on kaava.
3. Koska p on kaava, $\Box p$ on kaava.
4. Koska $\Box p$ ja $\Diamond q \wedge r$ ovat kaavoja, $\Box p \to \Diamond q \wedge r$ eli A on kaava.

Esimerkki 14. Kaavan $A = \big(\Box p \to \Diamond(q \wedge r)\big)$ rakennepuu on seuraava:



Rakennepuu ja alikaavojen joukko voidaan määritelmä täsmällisesti induktiolla. Sivulla 20 esiteltiin sijoituksen käsite. Sen induktiivinen määritelmä on seuraava:

$$\begin{aligned}
p[q_1/B_1,\ldots,q_k/B_k] &= \begin{cases} B_i, & \text{jos } \exists i \in \{1,2,\ldots,k\}\colon p = q_i, \\ p & \text{muulloin,} \end{cases} \\
(\Box B)[q_1/B_1,\ldots,q_k/B_k] &= \Box(B[q_1/B_1,\ldots,q_k/B_k]), \\
(\neg B)[q_1/B_1,\ldots,q_k/B_k] &= \neg(B[q_1/B_1,\ldots,q_k/B_k]), \\
(B \wedge C)[q_1/B_1,\ldots,q_k/B_k] &= B[q_1/B_1,\ldots,q_k/B_k] \wedge \\
&\qquad\qquad C[q_1/B_1,\ldots,q_k/B_k].
\end{aligned}$$

Seuraavaksi todistamme induktiolla, että korvaussääntö säilyttää validisuuden.

3.2 Korvaussääntö semanttisesti

Kaavoja muunneltaessa olemme soveltaneet *korvaussääntöä* (s. 20)

$$\text{jos } D \equiv E, \text{ niin } A[p/D] \equiv A[p/E]. \tag{REP}$$

Tässä alaluvussa todistamme tämän menettelyn oikeutetuksi. Eräs yksinkertainen versio korvaussäännöstä on ekstensionaalisuussääntö

$$A \equiv B \Rightarrow \Box A \equiv \Box B. \tag{RE}$$

Sääntö (RE) on voimassa sekä L- että Kripke-semantiikassa (Kripke-semantiikan osalta ks. lause 12 s. 31). Korvaussääntö voidaan todistaa jokaisessa semantiikassa, jossa sääntö (RE) ja lauseen 8 todistuksesta ilmenevät lauselogiikan loogiset ekvivalenttisuudet ovat voimassa.

Lause 8. *Olkoon A jokin kaava sekä D ja E sellaisia kaavoja, että $D \equiv E$. Tällöin $A[p/D] \equiv A[p/E]$.*

Todistus. Oletamme, että $D \equiv E$ ja käytämme induktiota kaavan A pituuden suhteen. Jos $A = p$, niin $A[p/D] = D$ ja $A[p/E] = E$. Jos taas $A = q \neq p$, niin $A[p/D] = q = A[p/E]$. Kummassakin tapauksessa siis $A[p/D] \equiv A[p/E]$. Täten väite on voimassa, kun A on lausemuuttuja.

Teemme seuraavaksi induktio-oletuksen, että $B[p/D] \equiv B[p/E]$ ja $C[p/D] \equiv C[p/E]$. Tarkastelemme ensin tapausta $A = \neg B$. Lauselogiikan perusteella (harjoitustehtävä) induktio-oletuksesta seuraa, että

$$A[p/D] = \neg B[p/D] \equiv \neg B[p/E] = A[p/E].$$

Tarkastelemme sitten tapausta $A = B \wedge C$. Lauselogiikan perusteella (harjoitustehtävä) induktio-oletuksesta seuraa, että

$$A[p/D] = B[p/D] \wedge C[p/D] \equiv B[p/E] \wedge C[p/E] = A[p/E],$$

joten tässäkin tapauksessa $A[p/D] \equiv A[p/E]$.

Lopuksi tarkastelemme tapausta $A = \Box B$. Säännön (RE) perusteella induktio-oletuksesta seuraa, että

$$A[p/D] = \Box B[p/D] \equiv \Box B[p/E] = A[p/E].$$

Olemme näin todistaneet väitteen $A[p/D] \equiv A[p/E]$. $\Box$

Korvaussäännössä ei edellytetä, että kaavassa A pitäisi jokainen kaavan D esiintymä korvata kaavalla E. Olkoon nimittäin $D \equiv E$ ja A^* jokin kaava, joka on saatu kaavasta A korvaamalla joitakin (ehkä kaikkikin) kaavan D esiintymät kaavalla E. Valitaan sellainen lausemuuttuja p, joka ei esiinny kaavassa A, ja korvataan lausemuuttujalla p ne kaavan D esiintymät, jotka kaavassa A^* on korvattu kaavalla E. Olkoon näin saatu kaava $A'[p]$. Tällöin triviaalisti $A = A'[p/D]$ ja $A^* = A'[p/E]$ ja korvaussäännön perusteella $A'[p/D] \equiv A'[p/E]$ eli $A \equiv A^*$. Voimme siis esittää korvaussäännön myös seuraavasti:

> Jos $D \equiv E$ ja kaava A^* saadaan kaavasta A korvaamalla siinä yksi tai useampi kaavan D esiintymä kaavalla E, niin $A \equiv A^*$.

4 Kripke-semantiikka

Lisäämme nyt L-semantiikan ilmaisukykyä johdannossa luonnehditulla tavalla niin, että voimme puhua kaikkien mahdollisten maailmojen ohella myös kaikista yksittäisen maailman suhteen mahdollisista maailmoista.

4.1 Kripke-mallit

Kripke-malli saadaan siis lisäämällä L-malliin $\langle W, P\rangle$ relaatio R: Kripke-malli on struktuuri $M = \langle W, R, P\rangle$, jossa W on epätyhjä joukko, $R \subseteq W \times W$ ja P on kuvaus $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\} \to \mathcal{P}(W)$. Kutsumme Kripke-mallia lyhyesti *K-malliksi* ja sen osastruktuurina olevaa Kripke-kehystä $\langle W, R\rangle$ *K-kehykseksi.*

Oletamme maailmojen olevan klassisia, joten konnektiivit noudattavat samoja totuusehtoja kuin L-semantiikassa (ks. s. 13). Modaalioperaattoreiden totuusehdot ovat seuraavat (kyseessä ovat samat totuusehdot kuin johdannossa esitetyt, mutta esitystapa on hieman formaalisempi):

$$\begin{aligned} M, w &\vDash \Box A, \text{ jos } \forall w' \in W : wRw' \Rightarrow M, w' \vDash A, \\ M, w &\vDash \Diamond A, \text{ jos } \exists w' \in W : wRw' \text{ ja } M, w' \vDash A. \end{aligned}$$

Huomaa, että jälkimmäinen totuusehto on johdettavissa edellisestä määritelmän $\Diamond A = \neg\Box\neg A$ avulla.

Samoin kuin L-malleissa (s. 14), myös K-malleissa M pätee totuusjoukoille, että

$$\begin{aligned} \|p_i\|^M &= P(p_i), \\ \|A \vee B\|^M &= \|A\|^M \cup \|B\|^M, \\ \|A \wedge B\|^M &= \|A\|^M \cap \|B\|^M, \\ \|\neg A\|^M &= W \setminus \|A\|^M. \end{aligned}$$

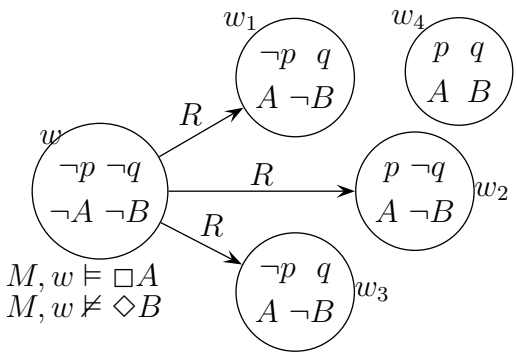
Voidaan todistaa (harjoitustehtävä), että jos M on K-malli, niin

$$\begin{aligned} \|\Box A\|^M &= \{\, w \mid \forall w' \in W : wRw' \Rightarrow w' \in \|A\|^M \,\}, \\ \|\Diamond A\|^M &= \{\, w \mid \exists w' \in W : wRw' \text{ ja } w' \in \|A\|^M \,\}. \end{aligned}$$

Esimerkki 15. Olkoon $W = \{w, w_1, w_2, w_3, w_4\}$,

$$R = \{\langle w, w_1\rangle, \langle w, w_2\rangle, \langle w, w_3\rangle\},$$

$P(p) = \{w_2, w_4\}$ ja $P(q) = \{w_1, w_3, w_4\}$. Tarkastelkaamme kaavoja $A = p \vee q$ ja $B = p \wedge q$. Kysymme, ovatko $\Box A$ ja $\Diamond B$ tosia maailmassa w, jolloin meidän ei tarvitse välittää totuusarvoista niissä maailmoissa, jotka eivät ole saavutettavissa maailmasta w.



Voimme todeta konnektiivien totuusehtojen mukaisesti, että A on tosi maailmoissa w_1, w_2, w_3 ja w_4, mutta epätosi maailmassa w. Koska w itse ei ole saavutettavissa maailmasta w, niin täten $w \vDash \Box A$. Vaikka kaava A ei siis olekaan tosi maailmassa w, se on kuitenkin välttämättä tosi maailmassa w. Yleisesti ottaen jos C on sellainen kaava, että $\{w_1, w_2, w_3\} \subseteq \|C\|^M$, niin $\Box C$ on tosi maailmassa w.

Kaava B ei ole tosi missään maailmasta w saavutettavissa olevassa maailmassa w_1, w_2 ja w_3, joten $\Diamond B$ on epätosi maailmassa w. Tähän ei vaikuta mitenkään se, että B on tosi maailmassa w_4. Yleisesti ottaen $\Diamond C$ on tosi maailmassa w, jos $\|C\|^M \cap \{w_1, w_2, w_3\} \neq \emptyset$.

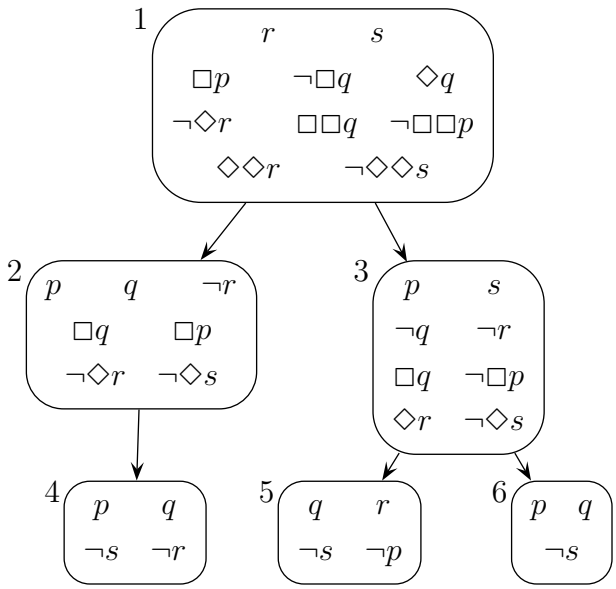
L-mallien yhteydessä käytimme mahdollisista maailmoista yleisiä merkintöjä w_1, w_2, w_3 jne., mutta yhtä hyvin voimme ottaa mahdollisten maailmojen joukoksi vaikkapa luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ tai sen jonkin osajoukon. Näin teemmekin seuraavissa esimerkeissä.

Esimerkki 16. Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$, $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

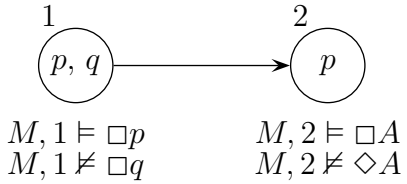
$$R = \big\{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 5\rangle, \langle 3, 6\rangle\big\},$$

$P(p) = \{2, 3, 4, 6\}$, $P(q) = \{2, 4, 5, 6\}$, $P(r) = \{1, 5\}$ ja $P(s) = \{1, 3\}$. Tällöin

$$\begin{array}{llll} M,1 \vDash \Box p, & M,1 \nvDash \Box q, & M,1 \vDash \Diamond q, & M,1 \nvDash \Diamond r, \\ M,1 \vDash \Box\Box q, & M,1 \nvDash \Box\Box p, & M,1 \vDash \Diamond\Diamond r, & M,1 \nvDash \Diamond\Diamond s. \end{array}$$



Esimerkki 17. Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$, $W = \{1, 2\}$, $R = \{\langle 1, 2\rangle\}$, $P(p) = \{1, 2\}$ ja $P(q) = \{1\}$.



Tällöin $M, 1 \vDash \Box p$, $M, 1 \nvDash \Box q$, $M, 1 \nvDash \Box(p \wedge \neg p)$, $M, 1 \vDash \Diamond(p \vee \neg p)$, mutta $M, 2 \vDash \Box(p \wedge \neg p)$ ja $M, 2 \nvDash \Diamond(p \vee \neg p)$.

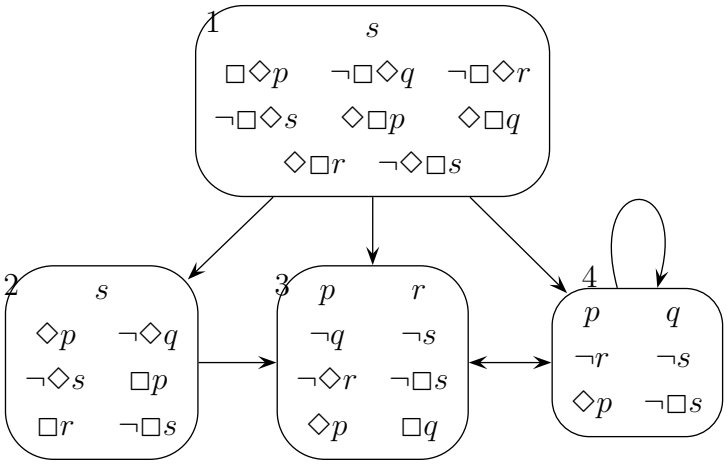
Edellisen esimerkin mallissa M on voimassa $M, 2 \vDash \Box(p \wedge \neg p)$. Jos tulkitsemme operaattorin $\Box$ tavalliseen tapaan välttämättömyysoperaattoriksi, niin tämä on paradoksaalista[1] ja tätä paradoksaalisuutta lisää vielä se, että toisaalta $M, 2 \nvDash \Diamond(p \vee \neg p)$. Ristiriitainen kaava $p \wedge \neg p$ on siis välttämättä tosi, mutta tautologia $p \vee \neg p$ ei ole mahdollisesti tosi maailmassa 2. Selitys on tietenkin, että koska $\nexists w \in W : 2Rw$, niin jokaiselle kaavalle A pätee triviaalisti, että $M, 2 \vDash \Box A$ ja $M, 2 \nvDash \Diamond A$. (Vastaava huomio voidaan tehdä esimerkin 16 maailmojen 4, 5 ja 6 osalta.) Voidaan todistaa helposti, että jos relaatio R toteuttaa mallissa $M = \langle W, R, P \rangle$ ehdon $\forall w \in W : \exists w' \in W : wRw'$, niin $\forall w \in W : M, w \nvDash \Box(p \wedge \neg p)$ ja $\forall w \in W : M, w \vDash \Diamond(p \vee \neg p)$.

Esimerkki 18. Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$, $W = \{1, 2, 3, 4\}$,

$$R = \big\{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 4,4\rangle\big\},$$

$P(p) = \{3, 4\}$, $P(q) = \{4\}$, $P(r) = \{3\}$ ja $P(s) = \{1, 2\}$. Tällöin

$$\begin{array}{llll} M,1 \vDash \Box\Diamond p, & M,1 \nvDash \Box\Diamond q, & M,1 \nvDash \Box\Diamond r, & M,1 \nvDash \Box\Diamond s, \\ M,1 \vDash \Diamond\Box p, & M,1 \vDash \Diamond\Box q, & M,1 \vDash \Diamond\Box r, & M,1 \nvDash \Diamond\Box s. \end{array}$$



Kaikissa tähän asti esitetyissä esimerkeissä mahdollisten maailmojen joukko W on ollut äärellinen. Puhumme tällöin *äärellisestä mallista* ja *kehyksestä*. Tarkastelemme seuraavaksi esimerkkiä äärettömästä mallista.

Esimerkki 19. Olkoon $W = \mathbb{N}$, $R = \{\, \langle i, j\rangle \mid i > j \,\}$, $P(p_i) = \{0, 1, \ldots, i\}$ ($i = 1, 2, 3, \ldots$). Tällöin mallissa $M = \langle W, R, P \rangle$ pätee

$$\begin{array}{rcl} M, i \vDash \Box p_{10} & \Leftrightarrow & i \leq 11, \\ M, i \vDash \Diamond p_{1001} & \Leftrightarrow & i \neq 0, \\ M, i \vDash \Diamond p_{100} \wedge \neg\Box p_{100} & \Leftrightarrow & i \geq 102, \\ M, 5 \vDash \Diamond p_j \wedge \neg\Box p_j & \Leftrightarrow & j \leq 3, \\ M, 103 \vDash \Box\Box\Box p_j & \Leftrightarrow & j \geq 100. \end{array}$$

[1]Puhuessamme modaalilogiikan yhteydessä ”paradokseista” kyse on useimmiten paremminkin epäintuitiivisuudesta kuin joistakin sellaisista loogisista ristiriitaisuuksista, joihin törmätään joukko-opin paradokseissa (antinomioissa).

4.2 K-validisuus

Kaavan A *validisuus mallissa* $M = \langle W, R, P\rangle$ määritellään samoin kuin L-mallien yhteydessä:

$$M \vDash A \Leftrightarrow \forall w \in W : M, w \vDash A.$$

Voidaan myös määritellä *validisuus kehyksessä* $\langle W, R\rangle$, *mallien luokassa* $\mathcal{M}$ ja *kehysten luokassa* $\mathcal{F}$:

$$\begin{array}{ll} \langle W, R\rangle & \vDash A, \text{ jos } A \text{ on validi jokaisessa mallissa } \langle W, R, P\rangle, \\ \mathcal{M} & \vDash A, \text{ jos } M \vDash A \text{ aina, kun } M \in \mathcal{M}, \\ \mathcal{F} & \vDash A, \text{ jos } F \vDash A \text{ aina, kun } F \in \mathcal{F}. \end{array}$$

Jos kaava A on validi jokaisessa K-mallissa, sanomme sen olevan *K-validi*. Kripke-semantiikassa K-validisuus on kaikkein yleisin validisuuden muoto siinä mielessä, että jos jokin kaava on K-validi, niin se on validi myös rajoitetummassa mielessä. Jos nimittäin jokin kaava on validi kaikkien K-mallien luokassa, niin se on tietenkin myös validi jokaisessa K-mallien osaluokassa. Osoitamme myös, että L-validisuus vastaa validisuutta tietyssä Kripke-mallien osaluokassa, joten jokainen K-validi kaava on myös L-validi. Jätämmekin yleensä etuliitteen "K" pois ja puhumme vain validisuudesta. Samoin merkinnän $\vDash_K A$ sijasta käytämme usein lyhyttä merkintää $\vDash A$.

Tarkastellaan tautologiaa $p \vee \neg p$. Voimme todistaa sen olevan K-validi aivan vastaavasti kuin todistimme sen olevan L-validi. Voimme nimittäin tarkastella yhtä yksittäistä maailmaa w. Olipa p tosi tai epätosi tässä maailmassa, niin $p \vee \neg p$ on tosi. Sillä, mitä vaihtoehtoisia maailmoja w:llä on, ei ole tämän tarkastelun kannalta merkitystä. Yleisesti onkin voimassa seuraava tulos.

Lause 9. *Jokainen tautologia on validi jokaisessa Kripke-mallissa.*

Tämän sinänsä yksinkertaisen tuloksen todistus on teknisistä syistä niin pitkä, että esitämme sen omassa alaluvussaan.

Tarkastelemme seuraavaksi kaavaa

$$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B). \tag{K}$$

Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ K-malli. Oletamme, että $M, w \vDash \Box(A \to B)$ ja $M, w \vDash \Box A$. Tarkastellaan sellaista mielivaltaista maailmaa $w' \in W$, että wRw'. Tällöin oletuksemme perusteella $M, w' \vDash A \to B$ ja $M, w' \vDash A$. Tästä seuraa, että $M, w' \vDash B$. Siis $M, w \vDash \Box B$. Näin olemme osoittaneet, että

$$\vDash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B).$$

Käsittelemme seuraavassa luvussa *modaalilogiikan systeemejä*. Näitä systeemejä voidaan luonnehtia sekä semanttisesti että syntaktisesti. Semanttisessa luonnehdinnassa systeemi määritellään kaikkien jossakin Kripke-mallien osaluokassa validien kaavojen joukoksi. Erityisesti kutsutaan systeemiksi **K** kaikkien K-validien kaavojen joukkoa.

Tarkastelemme nyt eräitä modaalilogiikan *päättelysääntöjä*, joiden avulla *todistusteoriassa* johdetaan *teoreemoja* annetuista *aksioomista* (ks. s. 9–11). Todistusteoriassa systeemejä käsitellään syntaktisesti, mutta tässä tarkastelemme päättelysääntöjä semanttisesti tutkimalla kysymystä annettua systeemiä vastaavan *validisuuden säilymisestä*. Sanomme päättelysäännön

$$A_1, A_2, \ldots, A_k / B$$

säilyttävän (ko. systeemiä vastaavan) validisuuden, jos aina, kun *premissit* A_1, A_2, ..., A_k ovat valideja, myös *johtopäätös* B on validi. Tämä voidaan todistaa esimerkiksi osoittamalla, että validisuus säilyy kaikissa (ko. systeemin) malleissa.

Osoitamme ensiksi päättelysäännön *modus ponens*

$$\frac{A,\ A \to B}{B} \qquad (MP)$$

ja *välttämättömyyssäännön* (*Rule of Necessitation*)

$$\frac{A}{\Box A}\,, \quad A \text{ on } K\text{-validi}, \qquad (RN)$$

säilyttävän validisuuden K-malleissa.

Jos $M, w \vDash A$ ja $M, w \vDash A \to B$, niin implikaation totuusehtojen mukaan $M, w \vDash B$. Päättelysääntö (MP) siis säilyttää totuuden yksittäisessä K-mallin maailmassakin, joten validisuus säilyy K-malleissa.

Päättelysäännössä (RN) täytyy olettaa, että A on K-validi, sillä jos A on tosi jossakin yksittäisessä maailmassa, niin siitä ei vielä seuraa, että myös $\Box A$ olisi siinä tosi. Validisuus malleissa sen sijaan säilyy, ja juuri tästä seuraa, että K-validisuus säilyy: Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ K-malli ja $w \in W$. Oletamme, että $M \vDash A$. Olkoon w' sellainen maailma, että wRw'. Koska $M \vDash A$, niin $M, w' \vDash A$. Täten $M, w \vDash \Box A$. Siis $M \vDash A$ implikoi $M \vDash \Box A$.

Olemme todistaneet näin seuraavan lauseen.

Lause 10. *Kaava* (K) $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ *on* K*-validi, ja päättelysäännöt* (MP) *ja* (RN) *säilyttävät* K*-validisuuden.*

Päättelysääntöjen (MP) ja (RN) välinen ero näkyisi myös todistusteoriassa, jos tutkisimme, mitä kaavoja voidaan johtaa mielivaltaisista oletuksista. Päättelysääntöä (MP) saa soveltaa vapaasti, ja esimerkiksi oletuksista p ja $p \to q$ saa päätellä johtopäätöksen q. Asetimme edellä päättelysäännössä (RN) premissille A ehdoksi, että se on K-validi. Todistusteoriassa tätä vastaa ehto "A on K-teoreema". Päättelysääntöä (RN) saa soveltaa vain aksioomiin ja niistä johdettuihin teoreemoihin, eikä esimerkiksi oletuksesta p saa päätellä johtopäätöstä $\Box p$.

Esitämme seuraavaksi kaksi tulosta, joihin usein viitataan tutkittaessa Kripke-semantiikan soveltuvuutta muidenkin kuin aleettisten modaalikäsitysten tulkitsemiseen.

Lause 11. *Monotonisuussääntö* (*Rule of Monotonicity*)

$$\frac{A \to B}{\Box A \to \Box B} \qquad (RM)$$

säilyttää K*-validisuuden.*

Todistus. Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ K-malli ja $w \in W$. Oletamme, että $M \vDash A \to B$ ja $M, w \vDash \Box A$. Olkoon $w' \in W$ sellainen maailma, että wRw'. Oletusten perusteella $M, w' \vDash A$ ja $M, w' \vDash A \to B$, joten $M, w' \vDash B$. Siis $M, w \vDash \Box B$. Olemme näin osoittaneet, että jos K-mallissa $M \vDash A \to B$, niin myös $M \vDash \Box A \to \Box B$. $\Box$

Vastaavanlaisesti todistetaan seuraava lause (harjoitustehtävä).

Lause 12. *Ekstensionaalisuussääntö* (*Rule of Extensionality*)

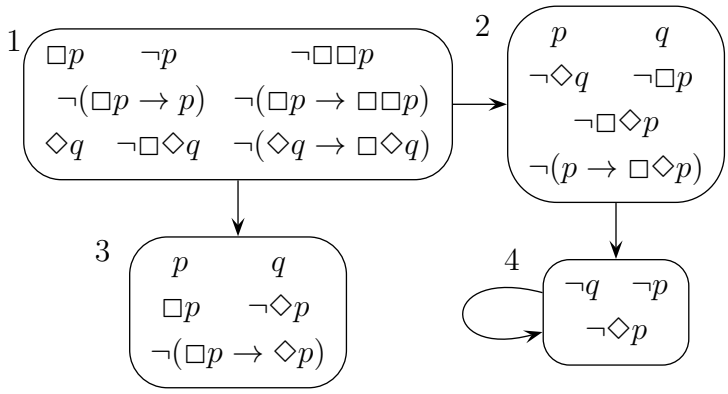
$$\frac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B} \qquad (RE)$$

säilyttää K-validisuuden.

Seuraava esimerkki osoittaa, että mikään skeemoista (D), (T), (B), (4), (5) ei ole yleisesti (siis kun A:n paikalla on mielivaltainen kaava) K-validi.

Esimerkki 20. Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle, W = \{1,2,3,4\}, R = \big\{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 4,4\rangle\big\}$, $P(p) = \{2,3\}$ ja $P(q) = \{2,3\}$. Tällöin

$$\begin{array}{lll} M,1 \not\models (\Box p \to p), & M,1 \not\models (\Box p \to \Box\Box p), & M,1 \not\models (\Diamond q \to \Box\Diamond q), \\ M,2 \not\models (p \to \Box\Diamond p), & M,3 \not\models (\Box p \to \Diamond p). & \end{array}$$



Validisuuden eri asteita

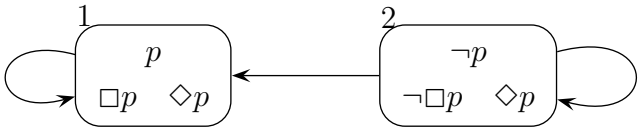
Lauselogiikassa kaava A voi olla tosi tai epätosi. Osa tosista lauseista on loogisesti tosia eli valideja ja osa epätosista lauseista loogisesti epätosia. Kripke-semantiikassa voidaan tarkastella kaavan totuutta mallin yksittäisessä maailmassa ja sen validisuutta yksittäisessä mallissa, kehyksessä, mallien tai kehysten luokassa sekä vielä kaikkien Kripke-mallien tai kehysten luokassa.

Olkoon $\mathcal{C}$ K-kehysten osaluokka, $F = \langle W, R\rangle \in \mathcal{C}$, $M = \langle F, P\rangle$ ja w mallin M maailma. Tällöin

$$\begin{array}{rcl} \models_K A & \Rightarrow & \models_{\mathcal{C}} A, \\ \models_{\mathcal{C}} A & \Rightarrow & F \models A, \\ F \models A & \Rightarrow & M \models A, \\ M \models A & \Rightarrow & M, w \models A. \end{array}$$

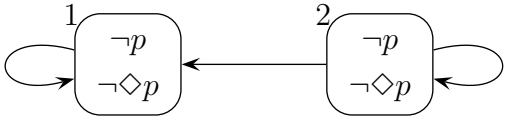
Esimerkki 21. Olkoon $\mathcal{C}_r$ kaikkien sellaisten kehysten luokka, joissa vaihtoehtorelaatio on refleksiivinen, ja $F \in \mathcal{C}_r$ K-kehys $\langle W, R\rangle$, jossa $W = \{1,2\}$ ja $R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$, ja $M_1 = \langle F, P_1\rangle$ siihen liittyvä K-malli, jossa $P_1(p) = \{1\}$. Tällöin on voimassa:

- $M_1, 1 \models \Box p$, mutta $M_1, 2 \not\models \Box p$ ja täten $M_1 \not\models \Box p$. Lause $\Box p$ on siis tosi mallin M_1 maailmassa 1, mutta se ei ole validi mallissa M_1.

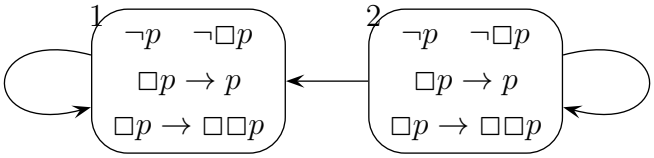


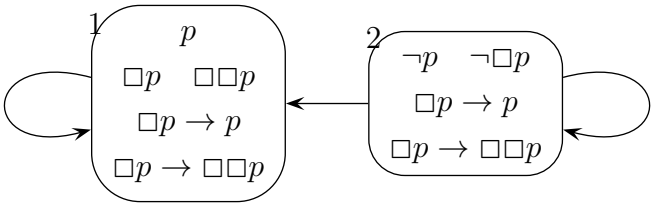
$M_1 \not\models \Box p, \quad M_1 \models \Diamond p$

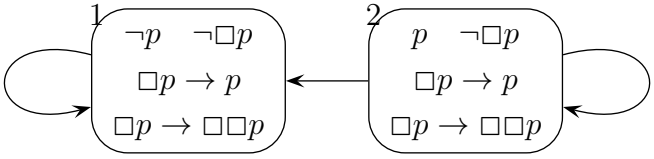
- Koska $M_1, 1 \models \Diamond p$ ja $M_1, 2 \models \Diamond p$, niin $M_1 \models \Diamond p$ eli lause $\Diamond p$ on validi mallissa M_1. Tämä lause ei kuitenkaan ole validi kehyksessä F, sillä kun esimerkiksi $P_2(p) = \emptyset$, niin $\langle F, P_2 \rangle \not\models \Diamond p$.

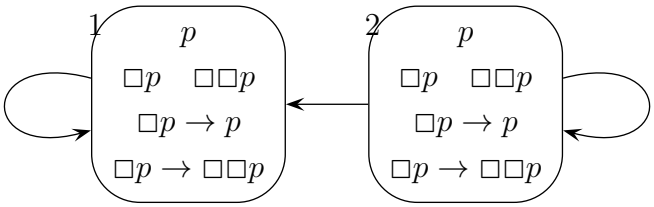


- Lause $\Box p \to p$ on validi kehyksessä F, sillä olipa $P(p) = \emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$ tai $\{1, 2\}$, niin mallissa $\langle F, P \rangle \models \Box p \to p$. Myös lause $\Box p \to \Box\Box p$ on validi kehyksessä F.

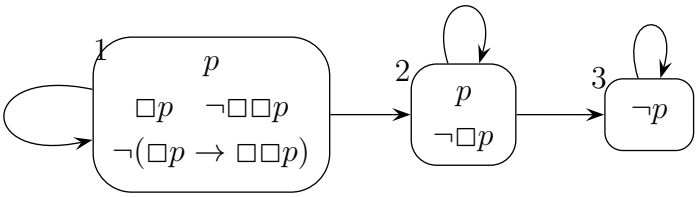








- Lause $\Box p \to p$ on validi myös kehysten luokassa $\mathcal{C}_r$. Sen sijaan $\not\models_{\mathcal{C}_r} \Box p \to \Box\Box p$. Kun nimittäin $M' = \langle W', R', P' \rangle$, jossa $W' = \{1, 2, 3\}$, $R' = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ ja $P'(p) = \{1, 2\}$, niin $M', 1 \not\models \Box p \to \Box\Box p$, joten $\langle W', R' \rangle \not\models \Box p \to \Box\Box p$, vaikka $\langle W', R' \rangle \in \mathcal{C}_r$.



- Lause $\Box p \to p$ ei ole validi kaikissa K-malleissa, joten sekään ei ole K-validi.

Looginen ekvivalenttisuus

Vastaavasti kuin L-semantiikan yhteydessä määrittelemme kaavojen A ja B olevan loogisesti ekvivalentit (tarkasti ottaen pitäisi käyttää termiä "loogisesti K-ekvivalentit", "loogisesti ekvivalentit suhteessa Kripke-semantiikkaan" tms.), jos ekvivalenssi $A \leftrightarrow B$ on K-validi. Merkitsemme tällöin $A \equiv_K B$ tai jos väärinkäsityksen vaaraa ei ole, lyhyesti $A \equiv B$. L-semantiikan kanssa analogisesti on voimassa, että $A \equiv_K B$, jos ja vain jos jokaisessa K-mallissa M pätee, että $\|A\|^M = \|B\|^M$.

Suoraan määritelmän perusteella $\Diamond A \equiv_K \neg\Box\neg A$. Voidaan myös helposti osoittaa, että $\Box A \equiv_K \neg\Diamond\neg A$. Monet muut L-semantiikassa loogisesti ekvivalentit kaavat eivät kuitenkaan ole loogisesti ekvivalentteja Kripke-semantiikassa.

4.3 Modaalilogiikan tautologiat

Olemme jo todenneet, että kaikki tautologiat ovat valideja Kripke-semantiikassa. Jotta voisimme todistaa tämän, meidän täytyy ensin antaa tekninen määritelmä tautologisuudelle modaalilogiikassa. Määrittelemme, että

> kaava B on *modaalilogiikan tautologia*, jos on olemassa sellainen lauselogiikan tautologia A ja modaalilogiikan kaavat $B_1, \ldots, B_k$, että $B = A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$.

Koska totuustaulujen käyttö on teoreettisissa tarkasteluissa kömpelöä, otamme käyttöön *totuusjakauman* eli *valuaation* käsitteen. Totuusjakauma on kuvaus

$$v\colon \{p_1, p_2, p_3, \ldots\} \to \{t, e\},$$

joka laajennetaan kuvaukseksi

$$v\colon \{\, A \mid A \text{ on lauselogiikan kaava} \,\} \to \{t, e\}$$

seuraavien ehtojen määräämällä yksikäsitteisellä tavalla:

$$\begin{aligned} v(\neg A) &= t \quad &&\Leftrightarrow v(A) = e, \\ v(A \wedge B) &= t \quad &&\Leftrightarrow v(A) = v(B) = t. \end{aligned}$$

Totuustaulussa tarkastellaan aina vain äärellistä määrää lausemuuttujia, mutta malleissa ja totuusjakautumissa kaikille lausemuuttujille annetaan jokin totuusarvo. Logiikan peruskurssilla määritellään tautologiaksi kaava, jonka totuustaulussa viimeksi saadussa sarakkeessa esiintyy vain totuusarvo t. Yhtä hyvin voimme määritellä, että A on tautologia, jos $v(A) = t$ aina, kun v on totuusjakauma.

Jotta modaalilogiikan tautologialle antamamme määritelmä olisi sopusoinnussa sen kanssa, mitä tautologialla lauselogiikassa tarkoitamme, seuraavan tuloksen pitää olla voimassa:

Lause 13. *Olkoot B_1, B_2, …, B_k ja A lauselogiikan kaavoja. Jos A on tautologia, niin myös $A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$ on tautologia.*

Tämä lause on helppo todistaa seuraavan aputuloksen avulla:

Lause 14. *Tarkastellaan kaikkia niitä (lauselogiikan) kaavoja, joissa esiintyvät korkeintaan lausemuuttujat q_1, q_2, ..., q_k. Olkoot v ja v' sellaisia valuaatioita, että*

$$v(q_i) = v'(B_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Tällöin

$$v\big(A[q_1, \ldots, q_k]\big) = v'\big(A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]\big).$$

Nämä lauseet ja niiden todistukset löytyvät esimerkiksi kirjasta [57]. Lause 14 todistetaan induktiolla, ja lause 13 käyttäen lausetta 14. Jätämme ne tässä harjoitustehtäviksi.

Jos B on modaalilogiikan tautologia, jossa esiintyy vain lauselogiikan kaavoja, niin lauseen 13 perusteella se on tautologia myös tavallisessa mielessä. Jokainen lauselogiikan tautologia B on myös modaalilogiikan tautologia (sillä triviaalisti $B = B[p/p]$). Jatkossa kutsummekin modaalilogiikan tautologioita lyhyesti vain tautologioiksi.

Todistamme seuraavaksi, että jokainen tautologia on K-validi. Todistamme ensin aputulokseksi, että jos A on lauselogiikan kaava, niin A on tautologia, jos ja vain jos A on K-validi. Sen jälkeen todistamme, että lauseille 13 ja 14 analoginen tulos on voimassa totuuksille maailmoissa ja validisuudelle. Aloitamme todistuksemme seuraavalla aputuloksella.

Lause 15. *Olkoon v valuaatio, M K-malli ja w sen maailma. Jos*

$$v(p_i) = t \Leftrightarrow M, w \vDash p_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

niin

$$v(A) = t \Leftrightarrow M, w \vDash A$$

aina, kun A on lauselogiikan kaava.

Todistus. Käytämme induktiota. Oletuksen mukaan väite pitää paikkansa lausemuuttujille. Oletetaan, että väite pitää paikkansa kaavoille B ja C. Tällöin

$$v(\neg B) = t \Leftrightarrow v(B) = e \overset{\text{I.O.}}{\Leftrightarrow} M, w \nvDash B \Leftrightarrow M, w \vDash \neg B$$

ja

$$\begin{aligned} v(B \wedge C) = t &\Leftrightarrow v(B) = v(C) = t \\ &\overset{\text{I.O.}}{\Leftrightarrow} M, w \vDash B \text{ ja } M, w \vDash C \\ &\Leftrightarrow M, w \vDash B \wedge C. \end{aligned}$$

Induktioperiaatteen mukaisesti väite on siis voimassa jokaiselle lauselogiikan kaavalle. □

Voimme nyt todistaa, että lauselogiikassa K-validisuus ja tautologisuus tarkoittavat samaa.

Lause 16. *Olkoon A lauselogiikan kaava. Tällöin A on tautologia, jos ja vain jos $\vDash_K A$.*

Todistus. Oletetaan ensin, että A on tautologia. Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$ ja $w \in W$. Määritelemme valuaation v seuraavasti:

$$v(p_i) = \begin{cases} t, & \text{jos } w \in P(p_i), \\ e, & \text{jos } w \notin P(p_i) \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Valuaation v määritelmän perusteella $v(p_i) = t$, jos ja vain jos $M, w \vDash p_i$. Koska A on tautologia, niin $v(A) = t$, ja täten lauseen 15 perusteella $M, w \vDash A$. Koska M ja w ovat tässä mielivaltaisia, niin näin on osoitettu lauselogiikan tautologian A olevan K-validi.

Oletetaan sitten, että A on K-validi. Olkoon v mielivaltainen valuaatio. Määritellään malli $M = \langle \{w\}, R, P \rangle$ seuraavasti: $R = \emptyset$ (tai $R = \{\langle w, w \rangle\}$),

$$P(p_i) = \begin{cases} \{w\}, & \text{jos } v(p_i) = t, \\ \emptyset, & \text{jos } v(p_i) = e \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Koska A on K-validi, niin $M, w \vDash A$. Lauseen 15 perusteella $v(A) = t$. Siis olemme osoittaneet, että K-validi lauselogiikan kaava on tautologia. □

Lauselogiikan kaava on siis tautologia, jos ja vain jos se on K-validi. On kuitenkin olemassa sellaisia modaalilogiikan K-valideja kaavoja, jotka eivät ole tautologioita. Lauseessa 19 todistamme, että käänteinen väite "jos A on modaalilogiikan tautologia, niin A on K-validi" on kuitenkin voimassa yleisesti. Tämän lauseen todistamiseen käytämme aputulosta, jonka mukaan K-validista (modaalilogiikan) kaavasta sijoituksella saatu kaava on myös K-validi. Todistus on analoginen lauseiden 13 ja 14 todistuksille. Todistamme ensin induktiolla seuraavan tuloksen.

Lause 17. *Olkoon annettu kaavat $B_1, \ldots, B_k$ ja lausemuuttujat $q_1, \ldots, q_k$. Jos $M = \langle W, R, P \rangle$ ja $M' = \langle W, R, P' \rangle$ ovat sellaisia K-malleja, että*

$$P(p_j) = \begin{cases} \|B_i\|^{M'}, & \textit{jos } \exists i \in \{1, 2, \ldots, k\} \colon p_j = q_i, \\ P'(p_j) & \textit{muulloin,} \end{cases}$$

niin

$$M, w \vDash A \Leftrightarrow M', w \vDash A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$$

aina, kun $w \in W$ ja A on modaalilogiikan kaava.

Todistus. Oletetaan ensin, että A on lausemuuttuja. Oletuksista seuraa välittömästi, että väite on tällöin voimassa (harjoitustehtävä). Tehdään seuraavaksi induktio-oletus, että väite on voimassa kaavoille B ja C eli

$$\forall w \in W \colon M, w \vDash B \Leftrightarrow M', w \vDash B',$$
$$\forall w \in W \colon M, w \vDash C \Leftrightarrow M', w \vDash C',$$

missä $B' = B[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$ ja $C' = C[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$. Huomaa, että

$$\begin{aligned} \Box B' &= (\Box B)[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k], \\ \neg B' &= (\neg B)[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k], \\ B' \wedge C' &= (B \wedge C)[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]. \end{aligned}$$

Olkoon $w \in W$. Tällöin

$$M, w \vDash \neg B \Leftrightarrow M, w \nvDash B \overset{\text{I.O.}}{\Leftrightarrow} M', w \nvDash B' \Leftrightarrow M', w \vDash \neg B'$$

ja

$$\begin{aligned} M, w \vDash B \wedge C &\Leftrightarrow M, w \vDash B \text{ ja } M, w \vDash C \\ &\overset{\text{I.O.}}{\Leftrightarrow} M', w \vDash B' \text{ ja } M', w \vDash C' \\ &\Leftrightarrow M', w \vDash B' \wedge C'. \end{aligned}$$

Koska tässä w on mielivaltainen, niin induktioväitös pätee kaavoille $\neg B$ ja $B \wedge C$.

Kun tarkastellaan vain yhtä maailmaa w, kuten edellä, niin induktio-oletuksessa riittäisi olettaa väitteen olevan voimassa maailmalle w. Viimeisessä induktioaskeleessa tarvitsemme kuitenkin tietoa, että väite on voimassa kaikille maailmoille.

Olkoon $w \in W$. Nyt

$$\begin{aligned} M, w \vDash \Box B &\Leftrightarrow \forall w' \in W : wRw' \Rightarrow M, w' \vDash B \\ &\overset{\text{I.O.}}{\Leftrightarrow} \forall w' \in W : wRw' \Rightarrow M', w' \vDash B' \\ &\Leftrightarrow M', w \vDash \Box B'. \end{aligned}$$

Induktioväite on siis voimassa myös kaavalle $\Box B$. □

Tämän aputuloksen perusteella voimme sitten todistaa seuraavan lauseen.

Lause 18. *Olkoot $B_1, \ldots, B_k$ ja A modaalilogiikan kaavoja. Jos $\vDash_K A$, niin*

$$\vDash_K A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k].$$

Todistus. Oletetaan, että $\vDash_K A$. Olkoon $M' = \langle W, R, P' \rangle$ K-malli. Määritellään malli $M = \langle W, R, P \rangle$ seuraavasti:

$$P(p_j) = \begin{cases} \|B_i\|^{M'}, & \text{jos } \exists i \in \{1, 2, \ldots, k\} : p_j = q_i, \\ P'(p_j) & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Lauseen 17 perusteella tällöin

$$\forall w \in W : \big(M, w \vDash A \Leftrightarrow M', w \vDash A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]\big).$$

Koska $\vDash_K A$, niin $\forall w \in W : M, w \vDash A$. Siis

$$\forall w \in W : M', w \vDash A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$$

eli $M' \vDash A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$. Koska mallista M' ei oletettu mitään erityistä, niin $\vDash_K A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$. □

Voimme nyt todistaa seuraavan lauseen.

Lause 19. *Olkoon B modaalilogiikan tautologia. Tällöin B on K-validi.*

Todistus. Koska B on modaalilogiikan tautologia, niin on olemassa sellainen lauselogiikan tautologia A ja modaalilogiikan kaavat $B_1, \ldots, B_k$, että $B = A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$. Lauseen 16 perusteella A on K-validi, joten lauseen 18 perusteella myös B on K-validi. □

On helppo nähdä, että yllä olevalle lauseelle esitettyä todistusta voidaan muokata (oikeastaan yksinkertaistaa) niin, että se soveltuu myös L-validisuudelle. Kaikki tautologiat ovat siis myös L-valideja. Lauseen todistuksessa ei tarvittu myöskään mitään oletuksia vaihtoehtorelaatiosta, joten tautologiat ovat myös valideja missä tahansa rajoitetussa Kripke-mallien luokassa.

5 Modaalilogiikan systeemit

Määrittelemme, että *normaali modaalilogiikka* eli *systeemi*[2] on sellainen joukko modaalilogiikan kaavoja, joka sisältää kaikki tautologiat sekä skeeman

$$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B) \tag{K}$$

instanssit ja on suljettu välttämättömyyssäännön

$$\frac{A}{\Box A}, \tag{RN}$$

modus ponensin

$$\frac{A,\ A \to B}{B} \tag{MP}$$

ja *universaali substituution*

$$\frac{A}{A[p/B]}, \quad (A \text{ teoreema, } B \text{ kaava}) \tag{US}$$

suhteen. Koska tarkastelemme Kripke-semantiikkaa (jonka erikoistapaukseksi L-semantiikkakin voidaan katsoa), niin kaikki tutkimamme systeemit toteuttavat nämä ehdot.

Universaali substituutiosääntöä ei tarvitse kuitenkaan eksplisiittisesti mainita, jos luonnehdimme systeemiin kuuluvia kaavoja *skeemojen* avulla. Jos esimerkiksi sanomme, että systeemiin kuuluvat kaikki skeeman $\Box A \to A$ instanssit, niin tämä tarkoittaa, että kaava $(\Box p \to p)[p/A]$, jossa A on mikä tahansa kaava, kuuluu systeemiin.[3] Kun kaikki systeemiin kuuluvat kaavat on esitetty tällaisten skeemojen avulla, universaali substituutiosääntö on automaattisesti voimassa.

Olemme tähän mennessä luonnehtineet modaalilogiikan systeemejä semanttisesti ja puhuneet esimerkiksi kaikkien L-validien kaavojen muodostamasta systeemistä **S5**. Osoittautuu, että systeemin **S5** voi määritellä semanttisesti myös pienimmäksi sellaiseksi joukoksi, johon kuuluvat kaikki ne kaavat, jotka ovat valideja jokaisessa Kripke-mallissa $\langle W, R, P\rangle$, jossa R on ekvivalenssirelaatio.

Systeemejä voi karakterisoida myös todistusteoreettisesti (siis syntaktisesti) antamalla sopivat aksioomat ja päättelysäännöt. Tutkimme kuitenkin systeemien aksiomatisointeja tarkemmin vasta todistusteoriaa käsittelevässä luvussa. Toisaalta meidän ei tarvitse edes ottaa kantaa siihen, miten systeemi on alunperin muodostettu. Systeemi voi esimerkiksi olla määritelty semanttisesti, mutta voimme tutkia, mitä syntaktisia ehtoja se toteuttaa. Systeemiä vastaavat aina useat aksioomasysteemit ja sitä voidaan luonnehtia yleensä useammalla kuin yhdellä tavalla myös semanttisesti.

[2]Kirjallisuudessa sana "systeemi" voi myös joskus tarkoittaa vain yksinkertaisesti modaalilogiikan kaavojen joukkoa. Tällöin voidaan käyttää normaalille modaalilogiikalle myös nimitystä "normaali modaalilogiikan systeemi".

[3]Edellä s. 30 puhuimme mm. skeeman (K) validisuudesta mallissa. Voimme nyt täsmentää, että skeeman validisuus tarkoittaa sitä, että kaikki sen instanssit ovat valideja tarkasteltavassa struktuurissa.

5.1 Systeemi K

Tarkastelemme seuraavaksi Kripke-semantiikan näkökulmasta minimaalista systeemiä **K**. Määrittelemme tämän systeemin **K** pienimmäksi sellaiseksi kaavajoukoksi, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

$$\text{Jos } A \text{ on tautologia, niin } A \in \mathbf{K}. \tag{PL}$$

$$\text{Jos } A \text{ ja } B \text{ ovat kaavoja, niin } \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B) \in \mathbf{K}. \tag{K}$$

$$\text{Jos } A \in \mathbf{K} \text{ ja } A \to B \in \mathbf{K}, \text{ niin } B \in \mathbf{K}. \tag{MP}$$

$$\text{Jos } A \in \mathbf{K}, \text{ niin } \Box A \in \mathbf{K}. \tag{RN}$$

Joukko **K** sisältää siis kaikki tautologiat ja ehdon (K) mukaiset kaavat ja on *suljettu* sääntöjen (MP) ja (RN) suhteen. Soveltamalla näitä ehtoja voidaan generoida jokainen joukon **K** alkio. Kaava A on siis joukon **K** alkio, jos ja vain jos on olemassa sellainen jono $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kaavoja, että $A_n = A$ ja jokainen jonossa esiintyvä kaava A_k on joko tautologia tai muotoa (K) tai saatu soveltamalla päättelysääntöä (MP) jonossa sitä ennen esiintyviin kaavoihin A_i ja $A_j = A_i \to A_k$ tai soveltamalla päättelysääntöä (RN) jonossa aikaisemmin esiintyvään kaavaan A_j (jossa tapauksessa siis $A_k = \Box A_j$).

Esimerkki 22. Ehdon (K) perusteella

$$\Box\big(p \to (p \vee q)\big) \to \big(\Box p \to \Box(p \vee q)\big) \in \mathbf{K}. \tag{1}$$

Koska systeemi **K** sisältää tautologiat, niin $p \to (p \vee q) \in \mathbf{K}$. Täten ehdon (RN) perusteella

$$\Box\big(p \to (p \vee q)\big) \in \mathbf{K}. \tag{2}$$

Kohdista (1) ja (2) seuraa ehdon (MP) perusteella, että $\Box p \to \Box(p \vee q) \in \mathbf{K}$.

Edellisen luvun perusteella (lauseet 9 ja 10) tiedämme, että on voimassa seuraava *luotettavuustulos*:

Lause 20. *Jos $A \in \mathbf{K}$, niin A on K-validi.*

Todistamme myöhemmin myös käänteisen väitteen, ja saamme seuraavan *täydellisyystuloksen*:[4]

Lause 21. *$A \in \mathbf{K}$, jos ja vain jos A on K-validi.*

Osoitimme aikaisemmin, että päättelysääntö (RM) säilyttää K-validisuuden. Jos $A \to B \in \mathbf{K}$, niin se on täydellisyystuloksen perusteella K-validi. Siis myös $\Box A \to \Box B$ on K-validi ja kuuluu täydellisyystuloksen perusteella joukkoon **K**. Vastaavanlainen päättely voidaan tehdä myös päättelysäännön (RE) suhteen. Täten on voimassa seuraava lause.

Lause 22. *Joukko **K** on suljettu päättelysääntöjen (RM) ja (RE) suhteen:*

$$\textit{Jos } A \to B \in \mathbf{K}, \textit{ niin } \Box A \to \Box B \in \mathbf{K}. \tag{RM}$$

$$\textit{Jos } A \leftrightarrow B \in \mathbf{K}, \textit{ niin } \Box A \leftrightarrow \Box B \in \mathbf{K}. \tag{RE}$$

Tämä tulos voidaan todistaa myös suoraan joukon **K** määritelmän pohjalta (harjoitustehtävä).

[4] Täydellisyystulosten yhteydessä systeemit ajatellaan yleensä aksiomaattisesti määritellyiksi. Systeemin **K** ollessa kyseessä asetetaan siis aksioomiksi skeemat (PL) ja (K) ja päättelysäännöiksi (MP) ja (RN).

5.2 Systeemit T, S4 ja S5

Voidaan todistaa, että systeemi **S5** on pienin sellainen systeemi, joka toteuttaa edellä esitettyjen ehtojen (PL), (K), (MP) ja (RN) lisäksi seuraavat ehdot:

$$\text{Jos } A \text{ on kaava, niin } \Box A \to A \in \mathbf{S5}. \tag{T}$$

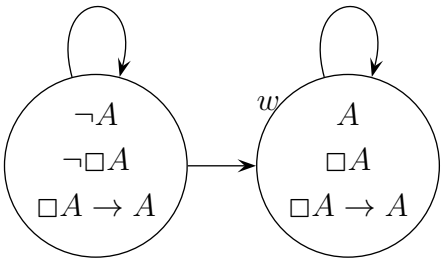
$$\text{Jos } A \text{ on kaava, niin } \Box A \to \Box\Box A \in \mathbf{S5}. \tag{4}$$

$$\text{Jos } A \text{ on kaava, niin } A \to \Box\Diamond A \in \mathbf{S5}. \tag{B}$$

Todistimme edellä nämä kolme kaavaa L-valideiksi (lause 4, s. 18), mutta osoitimme vastaesimerkeillä, että ne eivät ole valideja kaikissa K-malleissa (esimerkki 20, s. 31). Ne saadaan valideiksi K-malleissa asettamalla relaatiolle R rajoittavia ehtoja. Tarkastelemme näitä ehtoja seuraavissa kolmessa lauseessa.

Lause 23. *Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ sellainen K-malli, jossa relaatio R on refleksiivinen. Tällöin $M \vDash \Box A \to A$.*

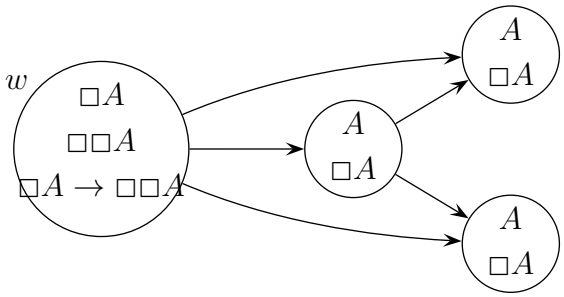
Todistus. Olkoon $w \in W$ sellainen maailma, että $M, w \vDash \Box A$. Refleksiivisyyden perusteella wRw, joten $M, w \vDash A$. Siis mallin M jokaisessa maailmassa w pätee, että $M, w \vDash \Box A \to A$.



□

Lause 24. *Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ sellainen K-malli, jossa R on transitiivinen. Tällöin $M \vDash \Box A \to \Box\Box A$.*

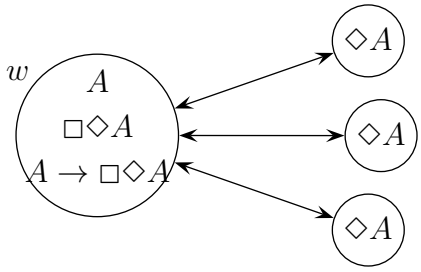
Todistus. Oletamme, että $M, w \vDash \Box A$. Olkoon $w' \in W$ sellainen maailma, että wRw' ja w'' jokin sellainen maailma, että $w'Rw''$. Koska R on transitiivinen, niin wRw''. Täten $M, w'' \vDash A$. Siis $M, w' \vDash \Box A$ ja täten $M, w \vDash \Box\Box A$. Olemme näin osoittaneet, että $M \vDash \Box A \to \Box\Box A$.



□

Lause 25. *Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ sellainen K-malli, jossa R on symmetrinen. Tällöin $M \vDash A \to \Box\Diamond A$.*

Todistus. Olkoon $w \in W$. Oletamme, että $M, w \vDash A$. Jos ei ole olemassa sellaista $w' \in W$, että wRw', niin triviaalisti $M, w \vDash \Box\Diamond A$. Tarkastelemme seuraavaksi tapausta, jossa on maailmasta w saavutettavissa olevia maailmoja.



Olkoon $w' \in W$ sellainen maailma, että wRw'. Koska R on symmetrinen, niin $w'Rw$. Siis $M, w' \vDash \Diamond A$. Koska siis $M, w' \vDash \Diamond A$ aina, kun wRw', niin $M, w \vDash \Box\Diamond A$. Näin olemme osoittaneet, että $M \vDash A \to \Box\Diamond A$. □

Jos R on ekvivalenssirelaatio eli refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen, niin skeemat (T), (4) ja (B) ovat valideja mallissa $\langle W, R, P\rangle$. L-mallit ja sellaiset K-mallit, joissa R on ekvivalenssirelaatio, vastaavat toisiaan. Todistammekin myöhemmin seuraavan täydellisyystuloksen:[5]

Lause 26. *Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

1. $A \in \mathbf{S5}$,
2. *A on L-validi,*
3. *A on validi jokaisessa sellaisessa K-mallissa $\langle W, R, P\rangle$, jossa R on ekvivalenssirelaatio.*

Muutamille systeemeille on historiallisista syistä vakiintunut oma nimityksensä. Kombinoimalla eri skeemoja voidaan muodostaa lukuisia systeemejä. Kätevä tapa nimetä erilaisia systeemejä on antaa ensin aksioomaskeemoille nimi; jos sitten aksioomasysteemiin $\mathbf{K}$ lisätään aksioomaskeemat (S_1), (S_2), …, (S_n), käytetään näin saatavien teoreemojen joukosta merkintää $\mathbf{KS_1 \ldots S_n}$. Tämä joukko on siis pienin sellainen päättelysääntöjen (MP) ja (RN) suhteen suljettu kaavajoukko, joka sisältää tautologiat ja skeemojen (K), (S_1), (S_2), …, (S_n) instanssit.

Näin menetellen saadaan systeemille **S5** vaihtoehtoinen nimitys **KTB4**. Myöhemmin todistamme, että systeemin **S5** määritelmässä (s. 39) skeemat (B) ja (4) voidaan korvata skeemalla

$$\Diamond A \to \Box\Diamond A. \tag{5}$$

On siis voimassa $\mathbf{S5} = \mathbf{KTB4} = \mathbf{KT5}$.

Muita modaalilogiikan historian kannalta tärkeitä systeemejä ovat $\mathbf{T} = \mathbf{KT}$ ja $\mathbf{S4} = \mathbf{KT4}$. Systeemin **T** aksiomatisointi saadaan siis lisäämällä systeemin **K** aksiomatisointiin skeema (T); lisäämällä siihen edelleen aksioomaskeema (4) saadaan systeemin **S4** aksiomatisointi. Todistamme näille systeemeille myöhemmin seuraavat täydellisyystulokset:

[5] Tällöin emme tietenkään määrittele systeemiä **S5** kaikkien L-validien kaavojen joukoksi, vaan luonnehdimme sen aksiomaattisesti semantiikasta riippumattomasti.

Lause 27. *Kaava A kuuluu joukkoon* **T**, *jos ja vain jos A on validi jokaisessa sellaisessa K-mallissa $\langle W, R, P\rangle$, jossa R on refleksiivinen.*

Kaava A kuuluu joukkoon **S4**, *jos ja vain jos A on validi jokaisessa sellaisessa K-mallissa $\langle W, R, P\rangle$, jossa R on refleksiivinen ja transitiivinen.*

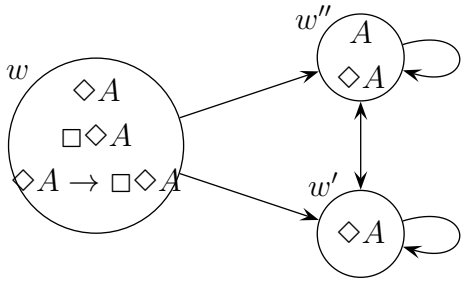
Edellä esitetyt tulokset oikeuttavat kutsumaan K-mallia $\langle W, R, P\rangle$

- *T-malliksi*, jos R on refleksiivinen
- *$S4$-malliksi*, jos R on refleksiivinen ja transitiivinen
- *$S5$-malliksi*, jos R on refleksiivinen, transitiivinen ja symmetrinen (eli R on ekvivalenssirelaatio).

Voidaan todistaa (harjoitustehtävä), että relaatio on ekvivalenssirelaatio, jos ja vain jos se on refleksiivinen ja *euklidinen*, joten $S5$-mallia voi luonnehtia myös näin. Tämä tulos seuraa myös seuraavasta lauseesta ja siitä, että **KTB4** = **KT5**.

Lause 28. *Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ sellainen K-malli, jossa R on euklidinen. Tällöin $\Diamond A \to \Box\Diamond A$.*

Todistus. Olkoon $w \in W$. Oletamme, että $M, w \vDash \Diamond A$. Olkoon w' sellainen maailma, että wRw'. Koska $M, w \vDash \Diamond A$, niin $\exists w'' \in W\colon wRw''$ ja $M, w'' \vDash A$ (on tietenkin mahdollista, että $w'' = w$ tai $w'' = w'$). Koska R on euklidinen, niin $w'Rw''$. Siis $M, w' \vDash \Diamond A$. Tästä seuraa, että $M, w \vDash \Box\Diamond A$ ja (koska w oli mielivaltainen) $M \vDash \Diamond A \to \Box\Diamond A$.



□

Nimityksillä *T-validi*, *$S4$-validi* ja *$S5$-validi* tarkoitamme validisuutta kaikissa kyseisen tyyppisissä malleissa.

5.3 Kehyksen määräämä systeemi

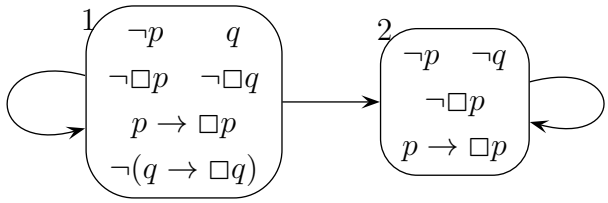
Olemme jo maininneet, että Kripke-mallista $\langle W, R, P\rangle$ voidaan erottaa sen osastruktuuri $\langle W, R\rangle$, jota kutsutaan Kripke-kehykseksi. Mallien sijasta voimme ottaa lähtökohdaksi yhtä hyvin myös kehykset ja sanoa, että kun P on valuaatio, niin $\langle W, R, P\rangle$ on kehykseen $\langle W, R\rangle$ liittyvä malli. Sanomme kaavan A olevan *validi kehyksessä* F ja merkitsemme $F \vDash A$, jos kaava A on validi jokaisessa kehykseen F liittyvässä mallissa $\langle F, P\rangle$.

Olkoon $F = \langle W, R\rangle$ Kripke-kehys, M siihen liittyvä malli ja $w \in W$. Merkitään

$$\begin{aligned} Th(M, w) &= \{\, A \mid M, w \vDash A \,\}, \\ Th(M) &= \{\, A \mid M \vDash A \,\}, \\ Th(F) &= \{\, A \mid F \vDash A \,\}. \end{aligned}$$

Kutsumme systeemiä $Th(M, w)$ *maailman* w, systeemiä $Th(M)$ *mallin* M ja systeemiä $Th(F)$ *kehyksen* F *määräämäksi systeemiksi.* Aikaisemmin esitetyn perusteella tiedämme, että systeemit $Th(M, w)$, $Th(M)$ ja $Th(F)$ sisältävät tautologiat ja skeeman (K) instanssit ja ovat suljettuja päättelysäännön (MP) suhteen. Systeemit $Th(M)$ ja $Th(F)$ ovat suljettuja myös päättelysäännön (RN) suhteen, mutta olemme jo huomanneet, että systeemi $Th(M, w)$ ei välttämättä toteuta tätä sulkeumaehtoa. Seuraava esimerkki osoittaa, että systeemi $Th(M)$ ei ole yleensä suljettu universaalin substituution (US) suhteen.

Esimerkki 23. Olkoon $W = \{1, 2\}$, $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$. Tarkastellaan kehykseen $F = \langle W, R\rangle$ liittyvää mallia $M = \langle F, P\rangle$, jossa $P(p) = \emptyset$ ja $P(q) = \{1\}$. Tässä mallissa $M \vDash p \to \Box p$, mutta esimerkiksi $M \nvDash q \to \Box q$.



Kun $A = p \to \Box p$, niin $A \in Th(M)$, mutta $q \to \Box q = A[p/q] \notin Th(M)$. Systeemi $Th(M)$ ei siis ole suljettu säännön (US) suhteen.

Lauseen 17 avulla saamme todistuksen sille, että kehyksen $F = \langle W, R\rangle$ määräämä logiikka $Th(F)$ on suljettu säännön (US) suhteen Jos nimittäin $F \nvDash A[p/B]$, niin jossakin mallissa $M' = \langle F, P'\rangle$ pätee $M' \nvDash A[p/B]$, jolloin siis $\|A[p/B]\|^{M'} \neq W$. Valitaan nyt sellainen P, että malli $M = \langle F, P\rangle$ toteuttaa ehdon

$$P(q) = \begin{cases} P'(q), & \text{jos } q \neq p, \\ \|B\|^{M'}, & \text{jos } q = p. \end{cases}$$

Tällöin lauseen 17 perusteella $\|A\|^M = \|A[p/B]\|^{M'} \neq W$, joten $M \nvDash A$ ja täten $F \nvDash A$. Näin on todistettu, että jos $F \vDash A$, niin $F \vDash A[p/B]$, eli että

$$A \in Th(F) \Rightarrow A[p/B] \in Th(F).$$

Kun siis F on Kripke-kehys, niin kaikkien siinä validien kaavojen joukko $Th(F)$ on normaali modaalilogiikka.

5.4 Modaliteetit

Looginen ekvivalenttisuus $A \equiv B$ tarkoittaa, että ekvivalenssi $A \leftrightarrow B$ on validi. Koska validisuus riippuu käytettävästä semantiikasta, loogisen ekvivalenttisuudenkin käsite on suhteutettava tarkasteltavaan semantiikkaan. Jos tarkastelemme samassa yhteydessä useita systeemejä, voimme ilmaista ekvivalenssin $A \leftrightarrow B$ Σ-validisuuden merkinnällä $A \equiv_\Sigma B$. Tässä $\mathbf{\Sigma}$ voi olla esimerkiksi jokin systeemeistä **K**, **T**, **S4** tai **S5**. Kun tarkoitamme loogista ekvivalenttisuutta kaikkien Kripke-mallien luokassa, jätämme yleensä pois alaindeksin K. Tämä on sikälikin perusteltua, että jos $A \equiv_K B$, niin myös $A \equiv_\Sigma B$, jossa $\mathbf{\Sigma}$ on mikä tahansa (normaali modaalilogiikan) systeemi (vrt. s. 29). Looginen ekvivalenttisuus on

kaavojen välinen ekvivalenssirelaatio (vrt. s. 19) myös Kripke-semantiikassa ja se säilyy, jos alikaavoja korvataan loogisesti ekvivalenteilla kaavoilla:

$$B \equiv_\Sigma C \Rightarrow A[p/B] \equiv_\Sigma A[p/C].$$

Erikoistapauksena tästä saamme ekstensionaalisuussäännön (RE) (s. 31 ja 38) semanttisen version:

$$B \equiv_\Sigma C \Rightarrow \Box B \equiv_\Sigma \Box C.$$

Esimerkki 24. Säännön (RE) perusteella $\Box A \equiv \Box B$ aina, kun $A \leftrightarrow B$ on tautologia. Siis esimerkiksi

$$\begin{aligned} \Box\neg\neg A &\equiv \Box A, \\ \Box(A \wedge B) &\equiv \Box(B \wedge A), \\ \Box\big(A \vee (B \wedge C)\big) &\equiv \Box\big((A \vee B) \wedge (A \vee C)\big). \end{aligned}$$

Kutsumme negaatiomerkkien ja välttämättömyys- ja mahdollisuusoperaattorien peräkkäisiä esiintymiä *modaliteeteiksi*. Systeemeissä on merkitykseltään erilaisia modaliteetteja. Esimerkiksi $\Box\Box A \equiv_{S5} \Box A$ ja $\Box\Box A \equiv_{S4} \Box A$, mutta $\Box\Box A \not\equiv_T \Box A$ ja $\Box\Box A \not\equiv_K \Box A$. Eräs tapa arvioida tietyn systeemin ja intuitiivisten käsitystemme vastaavuutta (jälkimmäiset tietenkin riippuvat modaalioperaattorien tulkinnasta) on tutkia, millaisia merkitykseltään erilaisia modaliteetteja systeemissä on. Jos jotkin niistä ovat mielestämme samaa merkitseviä (tai ainakin sellaisia, että niitä ei voi käytännössä erottaa toisistaan), niin systeemi ei tällöin vastaa intuitiotamme. Voi olla myös niin, että systeemissä joidenkin modaliteettien merkitys samastuu, vaikka intuitiivisesti teemmekin eron niiden välille. Yleensä kuitenkin systeemeissä voidaan erottaa enemmän erilaisia modaliteetteja kuin luonnollisessa kielessä.

Tutkimme tässä luvussa systeemien **T**, **S4** ja **S5** modaliteetteja. Systeemi **S5** on sikäli vahvin ja yksinkertaisin tässä tarkastelluista systeemeistä, että siinä on vähiten merkitykseltään erilaisia modaliteetteja. Esittelemme ensin modaliteettien duaalisuutta koskevan lauseen 29, joka helpottaa näitä tarkasteluita.

Modaliteetin α *duaali* α^D saadaan vaihtamalla modaliteetissa α operaattorit $\Box$ ja $\Diamond$ keskenään. Olemme jo muodostaneet modaliteettien duaaleja siirtäessämme negaatiota. Todistamme tässä, että yleisesti

$$\neg\alpha A \equiv \alpha^D \neg A$$

riippumatta siitä, missä systeemissä loogista ekvivalenttisuutta tarkastellaan.

Sekä Kripke- että L-semantiikassa on voimassa, että $\neg\Box A \equiv \Diamond\neg A$ ja $\neg\Diamond A \equiv \Box\neg A$ (L-semantiikka: lause 5 s. 19, Kripke-semantiikka: harjoitustehtävä). Täten $\neg\alpha A \equiv \alpha^D\neg A$, kun $\alpha = \Box$, $\Diamond$ tai $\neg$ (jälkimmäinen tapaus on triviaali, sillä $\neg^D = \neg$).

Teemme induktio-oletuksen, että yllä oleva tulos on voimassa modaliteetille α, jonka pituus on $k \geq 1$. Olkoon modaliteetin α pituus $k + 1 \geq 2$. Tällöin $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, jossa α_1 on $\Box$, $\Diamond$ tai $\neg$ ja modaliteetin α_2 pituus on k, ja

$$\neg\alpha A = \neg\alpha_1\alpha_2 A \equiv \alpha_1^D\neg\alpha_2 A.$$

Induktio-oletuksen perusteella $\neg\alpha_2 A \equiv \alpha_2^D\neg A$ ja koska $\alpha^D = \alpha_1^D\alpha_2^D$, niin täten

$$\neg\alpha A \equiv \alpha^D\neg A.$$

Esimerkki 25. Olkoon $\alpha = \Box\Box\Diamond$. Tällöin $\alpha^D = \Diamond\Diamond\Box$. Kaavat $\neg\Box\Box\Diamond A$ ja $\Diamond\Diamond\Box\neg A$ ovat loogisesti ekvivalentit kaikissa modaalilogiikan systeemeissä.

Määrittelemme implikaation $\alpha A \to \beta A$ duaaliksi implikaation $\beta^D A \to \alpha^D A$ ja ekvivalenssin $\alpha A \leftrightarrow \beta A$ duaaliksi ekvivalenssin $\alpha^D A \leftrightarrow \beta^D A$. Käytämme skeeman (S) duaalista nimitystä $(S\Diamond)$.

Esimerkki 26. Skeeman (5) $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ duaali on

$$(\Box\Diamond)^D A \to \Diamond^D A = \Diamond\Box A \to \Box A. \tag{5$\Diamond$}$$

Tyhjän merkkijonon duaali on tyhjä merkkijono itse. Täten skeeman (T) $\Box A \to A$ duaali on

$$A \to \Diamond A. \tag{$T\Diamond$}$$

Olkoot α ja β modaliteetteja ja $\mathbf{\Sigma}$ sellainen systeemi, jossa skeema $\alpha A \to \beta A$ on validi. Tällöin siis myös skeemat $\alpha\neg A \to \beta\neg A$ ja $\neg\beta\neg A \to \neg\alpha\neg A$ ovat valideja. Koska

$$\neg\beta\neg A \equiv \beta^D\neg\neg A \equiv \beta^D A$$

ja vastaavasti $\neg\alpha\neg A \equiv \alpha^D A$, niin myös skeema

$$\beta^D A \to \alpha^D A$$

on validi systemissä $\mathbf{\Sigma}$. Tästä implikaatiota koskevasta tuloksesta seuraa myös lauseen 29 modaliteettien muunnossääntöjen duaalisuutta koskeva tulos:

Lause 29. *Olkoon systeemissä $\mathbf{\Sigma}$ modaliteetin muunnossääntö $\alpha A \equiv_\Sigma \beta A$. Tällöin myös $\alpha^D A \equiv_\Sigma \beta^D A$.*

Seuraava esimerkki havainnollistaa yllä olevan todistuksen perusideaa.

Esimerkki 27. Oletetaan, että $\mathbf{\Sigma}$ on sellainen systeemi, jossa on voimassa $\Box\Box A \equiv_\Sigma \Box A$. Erityisesti myös jokaiselle kaavalle $\neg A$ pätee, että $\Box\Box\neg A \equiv_\Sigma \Box\neg A$. Jo lauselogiikasta seuraa, että kaavojen A ja B ollessa loogisesti ekvivalentit myös kaavat $\neg A$ ja $\neg B$ ovat keskenään loogisesti ekvivalentteja. Siis on voimassa $\neg\Box\Box\neg A \equiv_\Sigma \neg\Box\neg A$. Siirtämällä negaatiota kummallakin puolella saamme $\Diamond\Diamond\neg\neg A \equiv_\Sigma \Diamond\neg\neg A$. Tästä saamme kaksoisnegaation säännön avulla $\Diamond\Diamond A \equiv_\Sigma \Diamond A$.

Todistamme seuraavaksi, että systeemissä **S5** saa käyttää sääntöjen $\neg\Diamond A \equiv \Box\neg A$ ja $\neg\Box A \equiv \Diamond\neg A$ lisäksi muunnossääntöjä, joihin viittasimme jo L-semantiikan yhteydessä (s. 20).

Lause 30. *Systeemissä* **S5** *on voimassa*

$$\begin{array}{llll} \Box\Box A & \equiv_{S5} \Box A, & \Diamond\Diamond A & \equiv_{S5} \Diamond A, \\ \Box\Diamond A & \equiv_{S5} \Diamond A, & \Diamond\Box A & \equiv_{S5} \Box A. \end{array}$$

Todistus. Koska $S5$-mallit ovat refleksiivisiä ja transitiivisia, ekvivalenssi $\Box\Box A \leftrightarrow \Box A$ on $S5$-validi (lauseet 23 ja 24). Duaalisuuden perusteella myös $\Diamond\Diamond A \leftrightarrow \Diamond A$ on $S5$-validi.

Refleksiivisyyden perusteella $\Box\Diamond A \to \Diamond A$ on $S5$-validi. Osoitamme seuraavaksi, että skeema (5) $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ on $S5$-validi: Oletamme, että $M = \langle W, R, P\rangle$ on $S5$-malli ja $M, w \vDash \Diamond A$. Tällöin on olemassa sellainen w', että wRw' ja $M, w' \vDash A$. Olkoon w'' sellainen maailma, että wRw''. Koska R on symmetrinen, niin $w''Rw$. Transitiivisuuden perusteella $w''Rw'$, joten $M, w'' \vDash \Diamond A$. Koska w'' oli mielivaltainen sellainen maailma, että wRw'', niin täten olemme osoittaneet, että $M, w \vDash \Box\Diamond A$. Siis skeema $\Box\Diamond A \leftrightarrow \Diamond A$ on $S5$-validi. Täten myös sen duaali $\Diamond\Box A \leftrightarrow \Box A$ on $S5$-validi. $\Box$

Näiden muunnossääntöjen avulla kaavoille voidaan etsiä yksinkertaisempia esitysmuotoja.

Esimerkki 28. Olkoon A kaava. Tällöin

$$\Box\Diamond\Box\Box A \equiv_{S5} \Diamond\Box\Box A \equiv_{S5} \Box\Box A \equiv_{S5} \Box A$$

ja

$$\begin{aligned}\Box\neg\Diamond\Box\neg\neg\Diamond\Diamond\Box A \quad &\equiv_{S5} \Box\Box\Diamond\Box\Box\Diamond\neg A \equiv_{S5} \Box\Diamond\Box\Box\Diamond\neg A \\ &\equiv_{S5} \Diamond\Box\Box\Diamond\neg A \equiv_{S5} \Box\Box\Diamond\neg A \\ &\equiv_{S5} \Box\Diamond\neg A \equiv_{S5} \Diamond\neg A.\end{aligned}$$

Modaliteetteja on syntaktiselta kannalta ääretön määrä. Toisistaan merkinnällisesti eroavat modaliteetit voivat olla kuitenkin merkitykseltään (siis semanttisesta näkökulmasta) samoja. Modaliteetti, joka muodostuu k:sta peräkkäisestä negaatiomerkistä, on semanttiselta kannalta aina sama kuin modaliteetti $\neg$, kun k on pariton, ja tyhjä merkkijono, kun k on parillinen. Negaatio voidaan aina myös siirtää kaavassa oikealle säännön $\neg\alpha_1\alpha_2 A \equiv {\alpha_1}^D\neg\alpha_2 A$ osoittamalla tavalla. Vertailtaessa modaliteetteja semanttisesti voidaankin tarkastella modaliteetteja, joissa esiintyy korkeintaan yksi negaatiomerkki. Lauseesta 30 seuraa (harjoitustehtävä), että systeemissä **S5** on vain kuusi erimerkityksistä modaliteettia. Ne ovat seuraavat:

$$\text{(tyhjä merkkijono)}, \quad \neg, \quad \Box, \quad \Box\neg, \quad \Diamond \quad \text{ja} \quad \Diamond\neg.$$

Tämä tarkoittaa, että olipa α mikä tahansa modaliteetti, niin αA on loogisesti ekvivalentti systeemissä **S5** jonkin kaavoista

$$A, \quad \neg A, \quad \Box A, \quad \Box\neg A, \quad \Diamond A \quad \text{ja} \quad \Diamond\neg A$$

kanssa. Voidaan myös todistaa, ettei näitä modaliteetteja voi palauttaa toisiinsa. Alla on esimerkki sopivasta todistustekniikasta.

Esimerkki 29. Osoitamme, että modaliteettien $\Box\neg$ ja $\Diamond$ merkitykset eroavat systeemissä **S5**: Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$, jossa $W = \{w\}$, $R = \{\langle w, w\rangle\}$ ja P on sellainen valuaatio, että $P(p) = \emptyset$. Koska R on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen, niin M on $S5$-malli. Koska tässä mallissa $M, w \vDash \Box\neg p$ ja $M, w \nvDash \Diamond p$, ei skeema $\Box\neg A \leftrightarrow \Diamond A$ ole $S5$-validi.

Koska myös $S4$-mallit ovat transitiivisia, on voimassa $\Box\Box A \equiv_{\mathbf{S4}} \Box A$ ja $\Diamond\Diamond A \equiv_{S4} \Diamond A$. On myös voimassa $\Diamond\Box A \equiv_{S4} \Diamond\Box\Diamond\Box A$ (harjoitustehtävä) ja täten duaalisuuden perusteella $\Box\Diamond A \equiv_{S4} \Box\Diamond\Box\Diamond A$.

Koska esimerkiksi $\Box\Diamond A \not\equiv_{S4} \Diamond A$ (harjoitustehtävä), niin systeemissä **S4** on merkitykseltään erilaisia modaliteetteja enemmän kuin systeemissä **S5**. Voidaan todistaa (ks. [9, s. 153]), että nämä modaliteetit ovat tyhjä merkkijono, negaatio ja

$$\begin{gathered}\Box, \quad \Box\neg, \quad \Diamond, \quad \Diamond\neg, \quad \Box\Diamond, \quad \Box\Diamond\neg, \quad \Diamond\Box, \\ \Diamond\Box\neg, \quad \Box\Diamond\Box, \quad \Box\Diamond\Box\neg, \quad \Diamond\Box\Diamond, \quad \Diamond\Box\Diamond\neg\end{gathered}$$

(yhteensä siis 14 modaliteettia). Systeemissä **S4** kaikki modaliteetit αA voidaan siis esittää loogisesti ekvivalentissa muodossa βA tai $\beta\neg A$, jossa modaliteetin β pituus on korkeintaan kolme merkkiä.

Käytämme alla seuraavaa merkintää:

$$\Box^k = \underbrace{\Box\Box\cdots\Box}_{k \text{ kertaa}}.$$

Systeemissä **T** on äärettömän monta modaliteettia. Voidaan nimittäin todistaa, että kun $i < j$, niin modaliteetin $\Box^i$ merkitys eroaa modaliteetista $\Box^j$ (harjoitustehtävä).

6 Modaalilogiikan todistusteoriaa

Edellytämme klassisen logiikan periaatteiden olevan voimassa modaalilogiikassa: jokainen systeemi sisältää osanaan tautologioiden joukon ja on suljettu päättelysääntöjen

$$\frac{A,\ A \to B}{B} \qquad (MP)$$

ja

$$\frac{A}{A[p/B]} \quad (A \text{ teoreema, } B \text{ kaava}) \qquad (US)$$

suhteen. Modaalilogiikan systeemit muodostetaan lisäämällä erityisiä modaalisia periaatteita klassiseen lauselogiikkaan. Edellä määrittelimme, että normaali modaalilogiikka eli systeemi on sellainen joukko modaalilogiikan kaavoja, joka lauselogiikasta määräytyvien ehtojen lisäksi sisältää skeeman (K) instanssit ja on suljettu välttämättömyyssäännön (RN) suhteen. Teemme tähän kuitenkin sellaisen poikkeuksen, että emme kutsu kaikkien modaalilogiikan kaavojen muodostamaa joukkoa normaaliksi modaalilogiikaksi, vaikka se triviaalisti nämä ehdot toteuttaakin. Tässä luvussa tutkimme systeemejä syntaktisesti eli *todistusteoreettisesti*. Luonnehdimme täsmällisesti, millaisia päättelyitä eri systeemeissä voi tehdä. Ennen modaalilogiikan aksiomatisointia tutustumme yleisellä tasolla aksiomatisointiin liittyviin näkökulmiin ja esittelemme induktiotodistusperaatteen deduktion pituuden suhteen.

6.1 Luotettavuus ja täydellisyys

Jos tarkoituksemme on aksiomatisoida jokin systeemi, jonka semanttisen luonnehdinnan tunnemme ennestään (kuten esimerkiksi systeemi **S5**), aksioomien on oltava valideja vastaavassa semantiikassa (systeemin **S5** kohdalla esimerkiksi L-valideja). Semanttisesta näkökulmasta katsoen todistusteoriassa johdetaan loogisesti tosista (suhteutettuina tarkasteltavaan logiikkaan) aksioomista päättelysääntöjen avulla uusia loogisesti tosia kaavoja. Päättelysääntöjen tulee siis säilyttää totuus, jotta syntaktiset päättelyt olisivat semanttisesti mielekkäitä. Modaalilogiikassa "totuuden säilyminen" on luontevinta määritellä sanomalla, että validisuus kaikissa (relevanteissa) malleissa säilyy (vrt. sivu 30). Nämä aksioomasysteemille asetetut vaatimukset takaavat sen *luotettavuuden*: jokainen aksioomasysteemin teoreema on validi. Kun aksiomatisoimme jonkin systeemin, jolle meillä on jo semanttinen luonnehdinta, luotettavuuden lisäksi tavoittelemme myös aksioomasysteemin *täydellisyyttä*: jokaisen validin kaavan pitää olla johdettavissa.

Määrittelemme seuraavaksi täsmällisesti luotettavuuden ja täydellisyyden käsitteet. Oletetaan, että tarkastellaan aksioomasysteemiä $\mathcal{S}$ ja logiikkaa $\mathcal{L}$, jonka suhteen on määritelty totuuden, loogisen totuuden ja loogisen seurauksen käsitteet. Merkitsemme

- $\vDash_{\mathcal{L}} A$, jos kaava A on looginen totuus logiikassa $\mathcal{L}$
- $A_1, A_2, \ldots, A_n \vDash_{\mathcal{L}} B$, jos logiikassa $\mathcal{L}$ kaavoista A_1, A_2, ..., A_n seuraa loogisesti kaava B
- $\vdash_{\mathcal{S}} B$, jos B on aksioomasysteemin $\mathcal{S}$ teoreema
- $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash_{\mathcal{S}} B$, jos johtopäätös B on johdettavissa aksioomasysteemissä $\mathcal{S}$ premisseistä A_1, A_2, ..., A_n.

Kun on voimassa

$$\text{jos } A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash_{\mathcal{S}} B, \text{ niin } A_1, A_2, \ldots, A_n \vDash_{\mathcal{L}} B,$$

aksioomasysteemi $\mathcal{S}$ on luotettava logiikan $\mathcal{L}$ suhteen. Myös nimityksiä *eheä* (*sound*) ja *korrekti* käytetään. Täydellisyys tarkoittaa käänteisen väitteen

$$\text{jos } A_1, A_2, \ldots, A_n \vDash_{\mathcal{L}} B, \text{ niin } A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash_{\mathcal{S}} B$$

voimassaoloa. Tulosta, joka ilmaisee sekä luotettavuuden että täydellisyyden, nimitetään usein ”täydellisyystulokseksi”. Erikoistapauksena täydellisyystuloksesta saadaan, että logiikan $\mathcal{L}$ loogisten totuuksien joukko on sama kuin aksioomasysteemin $\mathcal{S}$ teoreemojen joukko: $\vDash_{\mathcal{L}} B$, jos ja vain jos $\vdash_{\mathcal{S}} B$.

6.2 Induktiotodistus deduktion pituuden suhteen

Deduktio on siis äärellinen kaavajono $B_1, B_2, \ldots, B_m$, jossa jokainen jonon jäsen B_i toteuttaa aksioomasysteemin $\mathcal{S} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ asettamat ehdot (ks. luku 1.4 s. 9–11). Jos voimme todistaa, että kaikilla kaavoilla $A \in \mathcal{A}$ on jokin sellainen ominaisuus $\mathcal{O}$, joka säilyy päättelysääntöjä $r \in \mathcal{R}$ käytettäessä, niin kaikilla jonon $B_1, B_2, \ldots, B_m$ kaavoilla on myöskin tämä ominaisuus $\mathcal{O}$. Erityisesti siis kaikilla teoreemoilla on ominaisuus $\mathcal{O}$.

Tätä todistusmenetelmää kutsutaan *induktioksi deduktion pituuden suhteen.* Siinä siis osoitetaan, että

$$\mathcal{O}(A) \text{ aina, kun } A \in \mathcal{A}$$

ja

$$\mathcal{O}(C_1), \ldots, \mathcal{O}(C_m) \Rightarrow \mathcal{O}(C) \text{ aina, kun } r \in \mathcal{R} \text{ ja } r(C_1, \ldots, C_m) = C,$$

ja todetaan, että induktioperiaatteen mukaisesti

$$\mathcal{O}(B) \text{ aina, kun } \vdash_{\mathcal{S}} B \text{ (eli kun } B \text{ on teoreema).}$$

Annamme seuraavaksi esimerkkinä tämän todistustekniikan soveltamisesta vaihtoehtoisen todistuksen sille, että kaikki tautologiat ovat K-valideja. Tässä todistuksessa on kuitenkin oletettava tunnetuksi alla esiteltävän lauselogiikan aksiomatisoinnin täydellisyysteoreema, jonka todistaminen ei ole aivan yksinkertainen asia.

Modaalilogiikan lauselogiikkaa vastaavalle osalle voidaan esittää esimerkiksi seuraavanlainen aksiomatisointi, kun peruskonnektiiveiksi valitaan negaatio ja disjunktio (ja tulkitaan kaikki modaalioperaattoreilla alkavat lauseet atomilauseiksi):

Aksioomat:

$$(A \vee A) \to A, \tag{Ax_1}$$

$$B \to (A \vee B), \tag{Ax_2}$$

$$(A \vee B) \to (B \vee A), \tag{Ax_3}$$

$$(B \to C) \to \big((A \vee B) \to (A \vee C)\big). \tag{Ax_4}$$

Päättelysääntö:

$$\frac{A,\ A \to B}{B}. \tag{MP}$$

Päättelysääntö (MP) säilyttää K-validisuuden (s. 30). Helposti voidaan todistaa myös, että aksioomaskeemat Ax_1, Ax_2, Ax_3 ja Ax_4 ovat K-valideja (harjoitustehtävä). Induktioperiaatteesta seuraa täten, että jokainen tämän aksiomatisoinnin teoreema on K-validi. Lauselogiikan täydellisyysteoreeman mukaan kaava A on tämän aksioomasysteemin teoreema, jos ja vain jos A on tautologia. Täten saamme tuloksen, että jos kaava on tautologia, niin se on K-validi.

6.3 Lauselogiikan aksiomatisoinnista osana modaalilogiikkaa

Modaalilogiikka sisältää siis osanaan lauselogiikan ja täten modaalilogiikan aksioomasysteemien pitää sisältää osanaan myös lauselogiikan aksiomatisointi. Jos aksiomatisoisimme lauselogiikan osan modaalilogiikasta esimerkiksi edellä esitetyllä tavalla, niin modaalilogiikan deduktioista tulisi melko pitkiä, koska myös lauselogiikasta johdettavat tulokset pitäisi aina esittää täydellisinä deduktioina.

Toisaalta jokainen klassisen lauselogiikan aksiomatisointi on sellainen, että aksioomasysteemin teoreemojen joukko on kaikkien tautologioiden joukko ja on (periaatteessa) mekaanisesti todettavissa, onko jokin lause tautologia vai ei. Sovimmekin, että hyväksymme aksioomiksi kaikki tautologiat.

Lauselogiikassa pätee myös, että jos $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \to B$ on tautologia, niin päättely, jossa premisseistä A_1, A_2, ..., A_k päätellään B, säilyttää totuuden. Muotoilemmekin tämän perusteella päättelysäännön

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_k}{B}, \quad \text{jos } A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \to B \text{ on tautologia.} \qquad (PL_k)$$

Tässä siis alaindeksi k kertoo käytettävien premissien lukumäärän. Päättelysääntö (PL_k) on rekursiivinen. Kun on annettu kaavat A_1, A_2, ..., A_k ja B, niin aina voidaan periaatteessa ratkaista kysymys siitä, onko kaava B pääteltävissä päättelysäännön (PL_k) avulla kaavoista A_1, A_2, ..., A_k. Ratkaisumenetelmänä voidaan käyttää esimerkiksi totuustaulumenetelmää ja tutkia, onko implikaatio $A_1 \wedge \cdots \wedge A_k \to B$ tautologia.

Päättelysääntö (MP) on selvästi säännön (PL_2) erikoistapaus. Tapauksessa $k = 0$ päättelysääntö (PL_k) saa muodon

$$\frac{}{B}, \quad \text{jos } B \text{ on tautologia.}$$

Sovimme, että päättelysääntö (PL_0) edustaa periaatetta, että jokainen tautologia on aksiooma. Modaalilogiikan aksiomatisoinnissa esitämme päättelysäännöillä (PL_k), $k = 0, 1, 2, \ldots$, lauselogiikan aksiomatisoinnin. Koska käytettävien premissien lukumäärä aina ilmenee deduktiosta, jätämme yleensä alaindeksin k pois ja puhumme vain yhdestä päättelysäännöstä (PL). Voidaan osoittaa (harjoitustehtävä), että päättelysääntö (PL) voidaan johtaa sääntöjen (PL_0) ja (MP) avulla.

6.4 Systeemi K

Pienintä normaalia modaalilogiikkaa kutsutaan systeemiksi **K**. Aksiomatisoimme[6] systeemin **K** seuraavasti:

[6]Täsmällisesti ottaen meidän pitäisi antaa oma merkintä kyseiselle aksioomasysteemille, sillä on muitakin aksioomasysteemejä, joiden teoreemojen joukko on **K**. Kontekstista on kuitenkin selvää, milloin puhuessamme systeemistä oleellista on myös se, minkä erityisen aksioomasysteemin määräämä logiikka se on.

Aksiooma:

$$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B). \tag{K}$$

Päättelysäännöt:

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_k}{B}, \quad \text{jos } A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \to B \text{ on tautologia;} \tag{PL}$$

$$\frac{A}{\Box A}, \quad \text{jos } A \text{ on teoreema.} \tag{RN}$$

Jos A on todistuva systeemissä **K** eli A on *K-teoreema*, merkitsemme $\vdash_K A$. Esitämme seuraavaksi esimerkkejä deduktioista systeemissä **K**. Muodollisesti kaavan $A = A_n$ todistus aksioomasysteemissä **K** on aikaisemmin esitettyjen yleisten määritelmien (s. 9–11) mukaisesti kaavajono $A_1, A_2, \ldots, A_n$, jossa jokainen kaava A_i on joko aksiooma tai tautologia tai päätelty jonkin päättelysäännön avulla sitä jonossa edeltävistä kaavoista. Kun tehdään aktuaalisia todistuksia, todistusjonon kaavat kannattaa merkitä allekkain ja numeroida, jolloin kaavan oikealle puolelle voidaan merkitä perustelu sille, miksi kaava on voitu ottaa todistusjonoon.

Esimerkki 30. $\vdash_K \Box\Box(A \vee \neg A)$, deduktio:

1.	$A \vee \neg A$	(PL)
2.	$\Box(A \vee \neg A)$	$1, (RN)$
3.	$\Box\Box(A \vee \neg A)$	$2, (RN)$.

Ensimmäinen askel oikeutetaan sillä, että $A \vee \neg A$ on tautologia.

Esimerkki 31. $\vdash_K \Box A \wedge \Box(A \to B) \to \Box B$, deduktio:

1.	$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$	(K)
2.	$\Box A \wedge \Box(A \to B) \to \Box B$	$1, (PL)$.

Toinen askel oikeutetaan sillä, että kaava

$$\big(\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)\big) \to \big(\Box A \wedge \Box(A \to B) \to \Box B\big)$$

on tautologia.

Esimerkki 32. $\vdash_K \Box(A \wedge B) \to \Box A$, deduktio:

1.	$A \wedge B \to A$	(PL)
2.	$\Box(A \wedge B \to A)$	$1, (RN)$
3.	$\Box(A \wedge B \to A) \to \big(\Box(A \wedge B) \to \Box A\big)$	(K)
4.	$\Box(A \wedge B) \to \Box A$	$2, 3, (PL)$.

Neljännen rivin kaava seuraa *modus ponensin* perusteella toisen ja kolmannen rivin kaavoista. Muodollisesti käyttämässämme aksiomatisoinnissa neljäs askel oikeutetaan sillä, että kaava

$$\Box(A \wedge B \to A) \wedge \big(\Box(A \wedge B \to A) \to (\Box(A \wedge B) \to \Box A)\big) \to \big(\Box(A \wedge B) \to \Box A\big)$$

on tautologia. Emme enää jatkossa esitä tämänkaltaisia lisäperusteluja säännön (PL) käytön yhteydessä.

Osoitamme seuraavaksi, että systeemissä **K** on käytettävissä päättelysäännöt

$$\frac{A \to B}{\Box A \to \Box B}, \qquad (RM)$$

$$\frac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}. \qquad (RE)$$

Johdamme ensin päättelysäännön (RM).

1.	$A \to B$	oletus
2.	$\Box(A \to B)$	$1, (RN)$
3.	$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$	(K)
4.	$\Box A \to \Box B$	$2, 3, (PL)$.

Tekemämme oletus $A \to B$ tarkoittaa sitä, että oletamme kaavojen A ja B olevan sellaisia, että skeema $A \to B$ on teoreema. Esimerkiksi voisi olla, että $A = p_1 \wedge p_2$ ja $B = p_1$, jolloin säännön (PL) perusteella $A \to B = p_1 \wedge p_2 \to p_1$ on teoreema. Monotonisuussääntö (RM) (vastaavaan tapaan kuin myös (RN) ja (RE)) on tulkittava seuraavasti:

Jos $A \to B$ on teoreema, niin $\Box A \to \Box B$ on teoreema.

Siitä siis ei seuraa, että esimerkiksi kaava $(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ olisi teoreema, aivan vastaavasti kuin säännöstä (RN) ei seuraa, että $p \to \Box p$ olisi teoreema.

Ekstensionaalisuussäännön (RE) johtamisessa käytämme hyväksi monotonisuussääntöä (RM). Yleisesti, kun olemme johtaneet jonkin teoreeman tai päättelysäännön, sitä voi myöhemmin käyttää todistuksissa ilman, että kyseinen teoreema tai päättelysääntö pitää johtaa uudelleen.

1.	$A \leftrightarrow B$	oletus
2.	$A \to B$	$1, (PL)$
3.	$\Box A \to \Box B$	$2, (RM)$
4.	$B \to A$	$1, (PL)$
5.	$\Box B \to \Box A$	$4, (RM)$
6.	$\Box A \leftrightarrow \Box B$	$3, 5, (PL)$.

Kun käytössä on monotonisuussääntö (RM), teoreemalle $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ voidaan esittää lyhyt johto:

1.	$A \wedge B \to A$	(PL)
2.	$\Box(A \wedge B) \to \Box A$	$1, (RM)$.

Osoitamme seuraavaksi, että $\vdash_K \Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$. Tässä siis $\neg\Diamond\neg A$ on lyhenne kaavalle $\neg\neg\Box\neg\neg A$.

1.	$A \leftrightarrow \neg\neg A$	(PL)
2.	$\Box A \leftrightarrow \Box\neg\neg A$	$1, (RE)$
3.	$\Box\neg\neg A \leftrightarrow \neg\neg\Box\neg\neg A$	(PL)
4.	$\Box A \leftrightarrow \neg\neg\Box\neg\neg A$	$2, 3, (PL)$
5.	$\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$	4 toisin kirjoitettuna.

Käytämme tälle teoreemalle nimitystä $(Df\Box)$, sillä tämä teoreema osoittaa, miten operaattori $\Box$ voitaisiin määritellä operaattorin $\Diamond$ avulla. Tosin olemme menetelleet päinvastoin ja määritelleet operaattorin $\Diamond$ operaattorin $\Box$ avulla. Triviaalisti onkin voimassa

$\vdash_K \Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$, sillä $\Diamond A$ on lyhennysmerkintä kaavalle $\neg\Box\neg A$. Käytämme tälle teoreemalle nimitystä $(Df\Diamond)$. Kun jossakin kaavassa esiintyy alikaavana $\neg\Box\neg A$, niin tämän alikaavan saa korvata alikaavalla $\Diamond A$. Johdamme myöhemmin todistusteoreettisen version säännöstä (REP), joka oikeuttaa soveltamaan myös sääntöä $(Df\Box)$ tällä tavoin suoraan osakaavoihin.

Esimerkki 33. Esimerkkinä säännön $(Df\Diamond)$ käytöstä osoitamme, että $\vdash_K \Diamond A \to \Diamond(A \vee B)$:

1.	$\neg(A \vee B) \to \neg A$	(PL)
2.	$\Box\neg(A \vee B) \to \Box\neg A$	$1, (RM)$
3.	$\neg\Box\neg A \to \neg\Box\neg(A \vee B)$	$2, (PL)$
4.	$\Diamond A \to \Diamond(A \vee B)$	$3, (Df\Diamond)$.

Voidaan todistaa (harjoitustehtävä), että systeemissä **K** on käytössä myös päättelysääntö

$$\frac{A \wedge B \to C}{\Box A \wedge \Box B \to \Box C} \qquad (RR)$$

ja päättelysääntöjen (RM) ja (RE) duaalit:

$$\frac{A \to B}{\Diamond A \to \Diamond B}, \qquad (RM\Diamond)$$

$$\frac{A \leftrightarrow B}{\Diamond A \leftrightarrow \Diamond B}. \qquad (RE\Diamond)$$

Teoreema $\Diamond A \to \Diamond(A \vee B)$ seuraa luonnollisesti välittömästi päättelysäännön $(RM\Diamond)$ avulla tautologiasta $A \to (A \vee B)$.

Universaali substituutio

Kaikissa edellä esitetyissä todistuksissa olemme johtaneet teoreemaskeemoja. Voisimme toki yhtä hyvin johtaa varsinaisia teoreemojakin. Esimerkiksi teoreemaskeeman $\Diamond A \to \Diamond(A \vee B)$ sijasta voisimme todistaa sen instanssin $\Diamond p_1 \to \Diamond(p_1 \vee p_2)$. Jos olisimme näin tehneet, voitaisiin kuitenkin kysyä, onko myös tämän mainitun teoreemaskeeman toinen instanssi $\Diamond p_2 \to \Diamond(p_2 \vee p_1)$ teoreema. Kysymys on itse asiassa siitä, onko universaali substituutiosääntö (US) käytettävissä aksioomasysteemissämme.

Vaikka päättelysääntöä (US) ei olekaan mainittu aksiomatisoinnissa, on kuitenkin voimassa, että jos $\vdash_K A$, niin $\vdash_K A[p/B]$, jossa B on mielivaltainen kaava. Osoitamme tämän induktiolla kaavan $A = A_n$ deduktion $A_1, A_2, \ldots, A_n$ suhteen: Jos kaava A_i on tautologia, niin myös kaava $A_i[p/B]$ on tautologia (lause 9 s. 29). Jos taas A_i on skeeman (K) instanssi, niin triviaalisti myös $A_i[p/B]$ on tämän skeeman instanssi. Jos A_i on päätelty kaavoista A_j ja $A_j \to A_i$, niin kaava $A_i[p/B]$ seuraa vastaavasti kaavoista $A_j[p/B]$ ja $(A_j \to A_i)[p/B] = A_j[p/B] \to A_i[p/B]$. Jos $A_i = \Box A_j$ on päätelty kaavasta A_j, niin vastaavasti $A_i[p/B] = \Box A_j[p/B]$ voidaan päätellä kaavasta $A_j[p/B]$.

Näin olemme osoittaneet, että kaavan $A[p/B]$ deduktio saadaan yksinkertaisesti korvaamalla kaavan A todistuksen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jokaisessa kaavassa lausemuuttuja p kaavalla B.

Tarkastelimme tässä aksioomasysteemiä **K**, mutta on selvää, että sääntö (US) on voimassa myös, vaikka tähän aksioomasysteemiin lisättäisiinkin muita aksiooma*skeemoja*.

6.5 Korvaussääntö

Kun $\mathbf{\Sigma}$ on sellainen normaali modaalilogiikka, että $\vdash_\Sigma \Box p_1 \to p_1$, niin säännön (US) perusteella esimerkiksi $\vdash_\Sigma \Box\neg p_1 \to \neg p_1$ ja $\vdash_\Sigma \Box\neg\neg p_1 \to \neg\neg p_1$. Emme kuitenkaan päättelysäännön (US) avulla pysty päättelemään, että $\vdash_\Sigma \Box p_1 \to \neg\neg p_1$, vaikka kaavat p_1 ja $\neg\neg p_1$ ovat loogisesti ekvivalentit. Sääntöä (US) käytettäessä on nimittäin korvattava systemaattisesti kaikki korvattavan kaavan esiintymät. Johdamme seuraavaksi päättelysäännön, joka oikeuttaa korvaamaan teoreemoissa kaavan sille loogisesti ekvivalentilla kaavalla. Olemme jo esittäneet (ks. s. 20 ja 24) tästä *korvaussäännöstä* (REP) semanttisen version:

$$\text{Jos } D \equiv E, \text{ niin } A[p/D] \equiv A[p/E].$$

Todistamme seuraavaksi, että korvaussääntö (REP) voidaan johtaa aksioomasysteemissä $\mathbf{K}$.

Lause 31 (REP)**.** *Jos* $\vdash_K D \leftrightarrow E$*, niin* $\vdash_K A[p/D] \leftrightarrow A[p/E]$.

Todistus. Todistamme väitteen induktiolla kaavan A pituuden suhteen. Ensinnäkin voimme todeta, että koska oletuksen perusteella $\vdash_K D \leftrightarrow E$ ja $\vdash_K q \leftrightarrow q$, niin väite on voimassa, kun A on p tai jokin muu lausemuuttuja q.

Teemme sitten induktio-oletuksen: $\vdash_K B[p/D] \leftrightarrow B[p/E]$ ja $\vdash_K C[p/D] \leftrightarrow C[p/E]$. Lauselogiikan perusteella induktio-oletuksesta seuraa, että $\vdash_K \neg B[p/D] \leftrightarrow \neg B[p/E]$, joten induktioväite on voimassa tapauksessa $A = \neg B$. Tarkastelemme seuraavaksi tapausta $A = B \wedge C$. Koska kaava

$$\big(B[p/D] \leftrightarrow B[p/E]\big) \wedge \big(C[p/D] \leftrightarrow C[p/E]\big) \\ \to \big((B \wedge C)[p/D] \leftrightarrow (B \wedge C)[p/E]\big)$$

on tautologia, niin $\vdash_K (B\wedge C)[p/D] \leftrightarrow (B\wedge C)[p/E]$ ja induktioväite on siis voimassa tässä tapauksessa. Lopuksi tarkastelemme tapausta $A = \Box B$. Induktio-oletuksesta $B[p/D] \leftrightarrow B[p/E]$ seuraa päättelysäännön (RE) perusteella, että $\vdash_K \Box B[p/D] \leftrightarrow \Box B[p/E]$. $\Box$

Säännön (REP) todistamisessa tarvittiin lauselogiikan periaatteiden lisäksi vain ekstensionaalisuussääntöä (RE), jonka johtamiseen tarvitaan (s. 51) skeemaa (K) ja päättelysääntöjä (PL) ja (RN). Sääntö (REP) on siis yleisesti voimassa normaalien modaalilogiikkojen yhteydessä. Sääntö (REP) voidaan esittää myös seuraavasti (ks. s. 24):

> Jos $\vdash_K D \leftrightarrow E$ ja kaava A^* on saatu kaavasta A korvaamalla siinä yksi tai useampi kaavan D esiintymä kaavalla E, niin $\vdash_K A \leftrightarrow A^*$.

Duaaliset päättelysäännöt

Kun $\mathbf{\Sigma}$ on normaali modaalilogiikka, niin $\vdash_\Sigma \neg\Box A \leftrightarrow \Diamond\neg A$ ja $\vdash_\Sigma \neg\Diamond A \leftrightarrow \Box\neg A$ (harjoitustehtävä). Korvaussääntöä hyödyntämällä voimme induktiolla modaliteetin α pituuden suhteen todistaa, että yleisemminkin on voimassa $\vdash_\Sigma \neg\alpha A \leftrightarrow \alpha^D\neg A$ (harjoitustehtävä). Olkoon systeemi $\mathbf{\Sigma}$ sellainen, että

$$(S) \qquad \vdash_\Sigma \alpha A \to \beta A.$$

Kun sijoitamme tähän skeemaan A:n paikalle $\neg A$, niin $\vdash_\Sigma \alpha\neg A \to \beta\neg A$. Kontraposition periaatteen mukaisesti tällöin $\vdash_\Sigma \neg\beta\neg A \to \neg\alpha\neg A$, josta negaation siirtoa koskevan tuloksen ja kaksoisnegaatiosäännön perusteella saamme, että

$$(S\Diamond) \qquad \vdash_\Sigma \beta^D A \to \alpha^D A.$$

Jos siis skeema (S) on systeemin $\mathbf{\Sigma}$ aksiooma- tai teoreemaskeema, niin myös sen duaali $(S\Diamond)$ on systeemin $\mathbf{\Sigma}$ teoreema.

Saamme helposti myös seuraavan ekvivalenssia koskevan tuloksen.

Lause 32. *Olkoon $\mathbf{\Sigma}$ normaali modaalilogiikka. Jos $\vdash_\Sigma \alpha A \leftrightarrow \beta A$, niin*

$$\vdash_\Sigma \alpha^D A \leftrightarrow \beta^D A.$$

Tämän lauseen todistamisen jätämme harjoitustehtäväksi. Lauseesta seuraa, että jos systeemissä $\mathbf{\Sigma}$ on voimassa päättelysääntö

$$(R) \qquad \frac{A \leftrightarrow B}{\alpha A \leftrightarrow \beta B},$$

niin siinä on voimassa myös sen duaali

$$(R\Diamond) \qquad \frac{A \leftrightarrow B}{\alpha^D A \leftrightarrow \beta^D B}.$$

Olemme jo esittäneet esimerkkejä tällaisista toisilleen duaaleista päättelysäännöistä sivulla 52.

6.6 Systeemin K laajennuksia

Muita normaaleja modaalilogiikkoja saadaan lisäämällä pienimmän normaalin modaalilogiikan **K** aksiomatisointiin lisäaksioomia, esimerkiksi yksi tai useampi seuraavista aksioomaskeemoista:

(D)	$\Box A \to \Diamond A$,		
(T)	$\Box A \to A$,	$(T\Diamond)$	$A \to \Diamond A$,
(B)	$A \to \Box\Diamond A$,	$(B\Diamond)$	$\Diamond\Box A \to A$,
(4)	$\Box A \to \Box\Box A$,	$(4\Diamond)$	$\Diamond\Diamond A \to \Diamond A$,
(5)	$\Diamond A \to \Box\Diamond A$,	$(5\Diamond)$	$\Diamond\Box A \to \Box A$.

Olemme käyttäneet merkintää $\mathbf{KS_1 \ldots S_n}$ sellaiselle systeemille, joka saadaan lisäämällä systeemin **K** aksiomatisointiin aksioomaskeemat $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Totesimme silloin, että systeemille **KT** käytetään myös nimitystä **T**, systeemille **KT4** nimitystä **S4** ja systeemille **KTB4** nimitystä **S5**. Jos kaava A on todistuva systeemissä **T** (vast. **S4** ja **S5**), puhutaan *T-teoreemasta* (vast. *$S4$-teoreemasta* ja *$S5$-teoreemasta*) ja merkitään $\vdash_T A$ (vast. $\vdash_{S4} A$ ja $\vdash_{S5} A$). Näiden systeemien tässä esitetyt määritelmät ovat sellaiset, että triviaalisti jokainen K-teoreema on myös T-teoreema, jokainen T-teoreema on myös $S4$-teoreema ja jokainen $S4$-teoreema on myös $S5$-teoreema.

Pienimmän normaalin modaalilogiikan systeemin **K** teoreemat ja päättelysäännöt ovat käytettävissä jokaisessa systeemissä $\mathbf{KS_1 \ldots S_n}$. Yhteenvetona näistä käytettävissä olevista päättelysäännöistä esitämme seuraavan lauseen:

Lause 33. *Jokaisessa aksioomasysteemissä* $\mathbf{KS_1} \ldots \mathbf{S_n}$ *on käytettävissä päättelysäännöt* (RM), $(RM\Diamond)$, (RE), $(RE\Diamond)$, (RR), $(RR\Diamond)$ *ja* (REP).

Alikaava $\neg\Box\neg A$ *voidaan korvata kaavoissa alikaavalla* $\Diamond A$ *ja alikaava* $\neg\Diamond\neg A$ *alikaavalla* $\Box A$.

Todistus. Päättelysäännöt (RM) ja (RE) on johdettu sivulla 51 ja päättelysääntö (REP) sivulla 53. Muiden päättelysääntöjen johtamisen jätämme harjoitustehtäviksi. Lauseen jälkimmäinen väite seuraa päättelysäännöstä (REP) ja K-teoreemoista $(Df\Box)$ ja $(Df\Diamond)$. $\Box$

Johdamme tässä muutamia T-, $S4$- ja $S5$-teoreemoja. Chellaksen kirjassa [9] on useita lisäesimerkkejä vastaavanlaisista deduktioista. Aloitamme skeeman (T) duaalista $(T\Diamond)$.

Esimerkki 34. $\vdash_T A \to \Diamond A$, deduktio:

1.	$\Box\neg A \to \neg A$	(T)
2.	$A \to \neg\Box\neg A$	$1, (PL)$
3.	$A \to \Diamond A$	$2, (Df\Diamond)$.

Esimerkki 35. $\vdash_T \Box A \to \Diamond A$, deduktio:

1.	$\Box A \to A$	(T)
2.	$A \to \Diamond A$	$(T\Diamond)$
3.	$\Box A \to \Diamond A$	$1, 2, (PL)$.

Skeema (D) on siis T-, $S4$- ja $S5$-teoreema.

Esimerkki 36. $\vdash_{S4} \Diamond\Diamond A \to \Diamond A$, deduktio:

1.	$\Box\neg A \to \Box\Box\neg A$	(4)
2.	$\neg\neg\Box\neg A \leftrightarrow \Box\neg A$	(PL)
3.	$\Box\neg\neg\Box\neg A \leftrightarrow \Box\Box\neg A$	$2, (RE)$
4.	$\neg\Box\neg\neg\Box\neg A \leftrightarrow \neg\Box\Box\neg A$	$3, (PL)$
5.	$\Diamond\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\Box\neg A$	$4, (Df\Diamond)$
6.	$\neg\Box\Box\neg A \to \neg\Box\neg A$	$1, (PL)$
7.	$\neg\Box\Box\neg A \to \Diamond A$	$6, (Df\Diamond)$
8.	$\Diamond\Diamond A \to \Diamond A$	$5, 7, (PL)$.

Tämä deduktio voidaan esittää hieman lyhyemmin, jos käytetään sääntöä (REP). Skeema $(4\Diamond)$ on siis $S4$- ja $S5$-teoreema. Vastaavan tyyliin voidaan osoittaa skeeman $(B\Diamond)$ olevan $S5$-teoreema.

Seuraavassa esimerkissä osoitamme, että skeema (5) on $S5$-teoreema.

Esimerkki 37. $\vdash_{S5} \Diamond A \to \Box\Diamond A$, deduktio:

1.	$\Diamond\Diamond A \to \Diamond A$	$(4\Diamond)$
2.	$\Box\Diamond\Diamond A \to \Box\Diamond A$	$1, (RM)$
3.	$\Diamond A \to \Box\Diamond\Diamond A$	(B)
4.	$\Diamond A \to \Box\Diamond A$	$2, 3, (PL)$.

Esimerkin 37 perusteella **KT5** $\subseteq$ **KTB4**. Osoitamme, että skeemat (B) ja (4) ovat systeemin **KT5** teoreemoja. Tästä seuraa, että **KTB4** $\subseteq$ **KT5**, jolloin siis **KTB4** = **KT5**. Johdamme ensin skeeman (B):

1.	$A \to \Diamond A$	$(T\Diamond)$
2.	$\Diamond A \to \Box\Diamond A$	(5)
3.	$A \to \Box\Diamond A$	$1, 2, (PL)$.

Siis $\vdash_{KT5} A \to \Box\Diamond A$.

Ennen skeeman (4) johtoa osoitamme aputulokseksi, että $\vdash_{KT5} \Diamond\Box A \to \Box A$ eli että $(5\Diamond)$ on systeemin **KT5** teoreema:

1.	$\Diamond\neg A \to \Box\Diamond\neg A$	(5)
2.	$\neg\Box\Diamond\neg A \to \neg\Diamond\neg A$	$1, (PL)$
3.	$\neg\Box\Diamond\neg A \to \Box A$	$2, (Df\Box)$
4.	$\Diamond\neg A \to \neg\neg\Diamond\neg A$	(PL)
5.	$\Box\Diamond\neg A \to \Box\neg\neg\Diamond\neg A$	$4, (RM)$
6.	$\neg\Box\neg\neg\Diamond\neg A \to \neg\Box\Diamond\neg A$	$5, (PL)$
7.	$\Diamond\Box A \to \neg\Box\Diamond\neg A$	$6, (Df\Box), (Df\Diamond)$
8.	$\Diamond\Box A \to \Box A$	$3, 7, (PL)$.

Tämän johdon jälkeen saamme helposti, että $\vdash_{KT5} \Box A \to \Box\Box A$:

1.	$\Diamond\Box A \to \Box A$	$(5\Diamond)$
2.	$\Box\Diamond\Box A \to \Box\Box A$	$1, (RM)$
3.	$\Box A \to \Box\Diamond\Box A$	(B)
4.	$\Box A \to \Box\Box A$	$2, 3, (PL)$.

Olemme näin todistaneet, että **S5** = **KTB4** = **KT5**:

Lause 34. *Systeemin* **S5** *aksiomatisoinnissa aksioomaskeemat* (B) *ja* (4) *voidaan korvata aksioomaskeemalla* (5).

7 Luotettavuus

Olemme esitelleet syntaktisen ja semanttisen tavan tarkastella systeemejä. Tutkiessamme esimerkiksi systeemiä **S5** voimme joko johtaa sen teoreemoja aksioomasysteemin **KTB4** (tai **KT5**) avulla tai voimme semanttisesti tutkia, mitkä kaavat ovat $S5$-valideja. Voidaan kuitenkin todistaa, että lopputulos eli se, mitä kaavoja systeemiin **S5** kuuluu, on sama kummassakin menettelytavassa. Kyse on modaalilogiikan luotettavuus- ja täydellisyystuloksista.

Olkoon $\mathcal{C}$ Kripke-kehysten (tai -mallien) osaluokka. Sanomme, että kaava A on *validi luokassa* $\mathcal{C}$, ja merkitsemme $\vDash_{\mathcal{C}} A$, jos $F \vDash A$ aina, kun $F \in \mathcal{C}$ (vastaavasti mallien ollessa kyseessä $M \vDash A$ aina, kun $M \in \mathcal{C}$). Kaikkien luokassa $\mathcal{C}$ validien kaavojen joukolle käytämme merkintää $Th(\mathcal{C})$ ja kutsumme sitä luokan $\mathcal{C}$ *determinoimaksi systeemiksi.* Jos $\mathcal{C}_F$ on joidenkin kehysten muodostama luokka, niin $Th(\mathcal{C}_F) = Th(\mathcal{C}_M)$, jossa $\mathcal{C}_M$ on kaikkien kehyksiin $F \in \mathcal{C}_F$ liittyvien mallien luokka.[7]

Merkitään $\mathbf{KS} = \mathbf{KS_1} \ldots \mathbf{S_n}$ (voimme tulkita tämän myös niin, että skeema S on skeemojen $S_1, S_2, \ldots, S_n$ konjunktio). Normaali modaalilogiikka **KS** on luotettava suhteessa luokkaan $\mathcal{C}$, jos on voimassa, että jokainen systeemin **KS** teoreema on validi luokassa $\mathcal{C}$. Systeemin **KS** täydellisyys luokan $\mathcal{C}$ suhteen tarkoittaa käänteistä väitettä eli sitä, että jokainen luokassa $\mathcal{C}$ validi kaava on systeemin **KS** teoreema. Kun sekä luotettavuus että täydellisyys ovat voimassa, niin $Th(\mathcal{C}) = \mathbf{KS}$ ja luokka $\mathcal{C}$ siis determinoi systeemin **KS**.

Aksioomasysteemin **KS** luotettavuus ja täydellisyys määritellään siis suhteessa johonkin mallien tai kehysten luokkaan $\mathcal{C}$. Varsinaisen tuloksen kannalta ei oikeastaan ole merkitystä sillä, mikä aksiomatisointi on valittu, sillä näissä tuloksissa tutkitaan aksioomasysteemin teoreemojen joukkoa. Tulosten todistukset luonnollisesti eroavat sen mukaisesti, millaista aksiomatisointia käytetään. Luokka $\mathcal{C}$ sen sijaan voidaan valita eri kriteereillä ja näin saadaan ainakin näennäisesti erilaisia luotettavuus- ja täydellisyystodistuksia.

Osoitamme ensimmäiseksi systeemin **K** luotettavuuden. Todistamme induktiolla kaavan A deduktion pituuden suhteen, että kun $\vdash_K A$, niin jokaisessa Kripke-mallissa $M \vDash A$.

Olkoon kaavan $A = A_n$ todistus $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$. Tällöin siis A_i on

- tautologia eli se on päätelty säännöllä (PL_0)
- skeeman (K) instanssi
- päätelty päättelysäännöillä (RN) kaavasta A_j, $j < i$, tai
- päätelty päättelysäännöllä (PL_k), $k \geq 1$, sitä edeltävistä kaavoista.

Teemme induktio-oletuksen, että $M \vDash A_j$, kun $j < i$, ja induktioaskeleessa osoitamme käymällä läpi yllä mainitut neljä mahdollisuutta, että $M \vDash A_i$. (Huomaa, että tapauksessa $i = 1$ ei ole muita mahdollisuuksia kuin että A_i on tautologia tai skeeman (K) instanssi.)

- Jos A_i on tautologia, niin lauseesta 19 (s. 36) seuraa, että $M \vDash A_i$.
- Jos A_i on kaavan (K) instanssi, niin lauseen 10 (s. 30) perusteella $M \vDash A_i$.

[7] Malleista voidaan muodostaa kuitenkin luokka $\mathcal{C}_M$ niin, että mukaan otetaan vain osa kehyksiin liittyvistä malleista ja tällöin ei aina ole sellaista kehysten luokkaa $\mathcal{C}_F$, että $Th(\mathcal{C}_M) = Th(\mathcal{C}_F)$. Erityisesti ns. *yleisiin kehyksiin* (general frames) liittyvät mallit voivat muodostaa tällaisia luokkia, joita ei vastaa mikään (tavallisten) kehysten luokka tässä mielessä. Ks. [25, s. 49–].

- Jos A_i on päätelty päättelysäännön (RN) avulla kaavasta A_j, $j < i$, niin $A_i = \Box A_j$ ja induktio-oletuksen perusteella $M \vDash A_j$, jolloin lauseen 10 perusteella $M \vDash \Box A_j$.

- Jos A_i on päätelty päättelysäännöllä (PL_k) $(k \geq 1)$ kaavoista A_{j_1}, A_{j_2}, ..., A_{j_k}, $\max\{j_1, j_2, \ldots, j_k\} < i$, niin kaava $(A_{j_1} \wedge A_{j_2} \wedge \ldots \wedge A_{j_k}) \to A_i$ on tautologia, joten lauseen 19 perusteella $M \vDash (A_{j_1} \wedge A_{j_2} \wedge \ldots \wedge A_{j_k}) \to A_i$. Täten induktio-oletuksesta $M \vDash A_{j_m}$ $(m = 1, 2, \ldots k)$ seuraa, että $M \vDash A_i$ (harjoitustehtävä).

Kun siis M on Kripke-malli, niin $\vdash_K A \Rightarrow M \vDash A$. Saamme näin seuraavan luotettavuustuloksen:

Lause 35. *Pienin normaali modaalilogiikka* **K** *on luotettava kaikkien Kripke-mallien luokan suhteen:*

$$\vdash_K A \Rightarrow \vDash_K A.$$

Vastaava tulos pätee tietenkin myös mille tahansa Kripke-mallien osaluokille. Erityisesti on voimassa $\vdash_K A \Rightarrow F \vDash A$ kaikille Kripke-kehyksille. Voimme todistaa tämän myös suoraan, sillä yllä olevassa induktiotodistuksessa voimme mielivaltaisen K-mallin M sijasta tarkastella yhtä hyvin mielivaltaista K-kehystä.

Täysin vastaavasti voimme todistaa myös yleiselle systeemille **KS** seuraavan luotettavuustuloksen:

Lause 36. *Jos M on sellainen Kripke-malli, että $M \vDash S_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, niin*

$$\vdash_{\mathbf{KS}} A \Rightarrow M \vDash A.$$

Sama tulos pätee myös, jos mallin M sijasta tarkastellaan kehystä F.

Olemme tässä tarkastelleet vain sellaisia systeemejä, joissa on lisätty systeemiin **K** äärellinen määrä aksioomaskeemoja. Periaatteessa aksioomaskeemoja voi olla myös ääretön määrä. On helppo nähdä, että tässä esiteltävät tulokset pätevät myös, vaikka lisättyjä aksioomaskeemoja olisi ääretönkin määrä, kunhan niiden joukko vain on rekursiivinen. On kuitenkin olemassa sellaisiakin normaaleja modaalilogiikkoja, joita ei voi ollenkaan aksiomatisoida rekursiivisesti. Näille systeemeille ei luotettavuustuloksiakaan ole mielekästä esittää. Hughes ja Cresswell [25, s. 14] mainitsevat lähteitä, joista löytyy esimerkkejä systeemeistä, jotka ovat vain äärettömästi aksiomatisoitavista, ja myös systeemeistä, jotka eivät ole (rekursiivisesti) aksiomatisoitavissa.

Sanomme, että F on *kehys systeemille* **KS**, jos jokainen systeemin **KS** teoreema on validi kehyksessä F eli jos $\mathbf{KS} \subseteq Th(F)$. Jokainen Kripke-kehys on siis kehys systeemille **K**. Jos F on kehys systeemille **KS**, niin luonnollisesti skeemat S_i ovat valideja kehyksessä F. Lauseen 36 perusteella myös käänteinen väite pitää paikkansa, joten F on kehys systeemille **KS**, jos ja vain jos aksioomaskeemat S_1, S_2, ..., S_n ovat valideja kehyksessä F.

Tässä esitellyt luotettavuustulokset systeemeille **KS** ovat sikäli triviaaleja, että asetimme kehykselle F ehdon, että siinä ovat valideja skeemat S_1, S_2, ..., S_n, mutta emme luonnehtineet kehystä F näistä skeemoista riippumattomalla tavalla. Mielenkiintoisempia luotettavuus- ja täydellisyystuloksia saadaan, kun kehystä tai kehysten (tai mallien) luokkaa luonnehditaan vaihtoehtorelaation ominaisuuksien avulla. Merkitsemme $\mathcal{O}_i(R)$,

jos relaatiolla R on ominaisuus $\mathcal{O}_i$ (esimerkiksi R on refleksiivinen). Olkoon $\mathcal{O}$ ominaisuuksien $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, ..., $\mathcal{O}_n$ yhdistelmä. Jos on voimassa, että

$$\mathcal{O}_i(R) \Rightarrow \langle W, R\rangle \vDash S_i, \quad i = 1, 2, \ldots n,$$

niin lauseesta 36 seuraa suoraan, että systeemi **KS** on luotettava kehysten luokan $\mathcal{C} = \{\, \langle W, R\rangle \mid \mathcal{O}(R) \,\}$ suhteen. Esimerkiksi koska skeema (T) on validi refleksiivisissä kehyksissä, niin systeemi **KT** on luotettava refleksiivisten kehysten (ja mallien) luokan suhteen. Esitämme tämänkaltaisia luotettavuustuloksia täydellisyystulosten yhteydessä.

Ennen täydellisyystulosten todistamisia esitämme muotoa

$$\langle W, R\rangle \vDash S_i \Leftrightarrow \mathcal{O}_i(R)$$

olevia tuloksia. Näiden vastaavuuksien avulla voidaan siis luonnehtia vaihtoehtorelaation ominaisuuksien avulla luotettavuustuloksissa kehyksiä, joissa tietyt skeemat ovat valideja (tällöin riittää vastaavuuden suunnan "$\Leftarrow$" voimassaolo. Samat vastaavuudet esiintyvät myös täydellisyystulosten muotoiluissa. Nimittäin vastaavuuden suunnasta "$\Rightarrow$" seuraa, että jos systeemi **KS** on täydellinen jonkin kehysten luokan suhteen, niin kaikilla tämän luokan kehysten vaihtoehtorelaatioilla täytyy olla skeemoja S_i vastaavat ominaisuudet $\mathcal{O}_i$. Nämä vastaavuudet ovat mielenkiintoisia myös sinänsä, sillä ne osoittavat modaalilogiikan ja predikaattilogiikan välisen yhteyden.

8 Korrespondenssiteoriaa

Olemme osoittaneet, että skeema (T) $\Box A \to A$ on validi T-mallissa eli mallissa, jonka vaihtoehtorelaatio on refleksiivinen (lause 23 s. 39). Tästä seuraa välittömästi, että jos Kripke-kehyksessä $F = \langle W, R\rangle$ relaatio R on refleksiivinen, niin skeema (T) on validi myös siinä. Koska systeemi $Th(F)$ on suljettu universaalin substituution suhteen, niin skeemojen sijasta voimme yhtä hyvin puhua niiden yksinkertaisista instansseista, esimerkki skeeman (T) yhteydessä kaavasta $\Box p \to p$, jossa p viittaa johonkin lausemuuttujaan p_i. Tämänkaltaiset vastaavuudet ovat useassa tapauksessa voimassa myös kääntäen: jos tietty kaava on validi kehyksessä $\langle W, R\rangle$, niin relaatiolla R on tätä kaavaa vastaava ominaisuus. Todettakoon kuitenkin, että kaikkia relaation R ominaisuuksia ei vastaa tässä mielessä mikään modaalilogiikan kaava. Nämä vastaavuudet eivät ole myöskään voimassa mallitasolla molempiin suuntiin. Voi olla esimerkiksi, että skeema (T) on validi mallissa $M = \langle W, R, P\rangle$, vaikka R ei olekaan refleksiivinen.

Esimerkki 38. Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$, missä $W = \{1, 2\}$, $R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$ ja P toteuttaa ehdon

$$P(p_i) = W \quad \text{tai} \quad P(p_i) = \emptyset \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

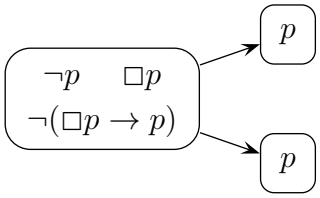
Maailmat 1 ja 2 eivät mitenkään eroa toisistaan. Helposti voimmekin todistaa induktiolla (harjoitustehtävä), että jokaiselle kaavalle A pätee

$$M, 1 \vDash A \Leftrightarrow M, 2 \vDash A.$$

Koska $M, 1 \vDash \Box A$, jos ja vain jos $M, 2 \vDash A$, ja $M, 2 \vDash \Box A$, jos ja vain jos $M, 1 \vDash A$, niin tästä seuraa, että skeema (T) $\Box A \to A$ on validi mallissa $M = \langle W, R, P\rangle$. Relaatio R ei kuitenkaan ole refleksiivinen.

Yllä olevan esimerkin mallissa $\langle W, R, P\rangle$ valuaatio P sattui olemaan sellainen, että skeema (T) on siinä validi. Jos kuitenkin tutkitaan vaikkapa valuaatiota P', jolle $P'(p) = \{2\}$, niin skeeman (T) instanssi $\Box p \to p$ ei olekaan validi mallissa $\langle W, R, P'\rangle$. Todistamme seuraavaksi, että tällainen valuaatio löytyy aina, kun vaihtoehtorelaatio ei ole refleksiivinen.

Oletamme, että kehyksessä $\langle W, R\rangle$ relaatio R ei ole refleksiivinen eli että on olemassa sellainen maailma $w \in W$, että $w \not R w$. Olkoon P sellainen valuaatio, että $P(p) = W \setminus \{w\}$, ja olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$. Tällöin jos on olemassa sellainen w', että wRw', niin $M, w' \vDash p$, sillä on oltava $w' \neq w$. Siis $M, w \vDash \Box p$, mutta $M, w \nvDash p$, eikä kaava $\Box p \to p$ ole validi mallissa M. Alla oleva kuvio havainnollistaa tätä konstruktiota:



R ei refleksiivinen

Edellä esitetyn perusteella voimme päätellä seuraavan *vastaavuus-* eli *korrespondenssituloksen*:

$$\langle W, R\rangle \vDash \Box p \to p \Leftrightarrow R \text{ on refleksiivinen.} \qquad (C_T)$$

Kun on annettu jokin formaali kieli ja säännöt siitä, millaisissa struktuureissa (malleissa, kehyksissä yms.) ja miten se tulkitaan, niin sanomme yleisesti, että tämän formaalin kielen kaava A määrittelee ominaisuuden $\mathcal{O}$, jos kaikissa tulkinnoissa, joissa A on tosi, tulkinnassa esiintyvällä struktuurilla on ominaisuus $\mathcal{O}$. Kun siis käytämme Kripke-kehyksiä modaalilogiikan kaavojen tulkitsemiseen, voimme sanoa kaavan $\Box p \to p$ määrittelevän kaksipaikkaisen relaation (eli kehyksessä esiintyvän vaihtoehtorelaation) ominaisuuden "refleksiivisyys". Voimme määritellä kaksipaikkaisten relaatioiden ominaisuuksia myös ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan avulla tarkastelemalla kieltä, jonka aakkostoon kuuluu kaksipaikkainen predikaattisymboli P. Tämän kielen mallissa $\langle X, V\rangle$ predikaattisymboli P tulkitaan perusjoukon (universumin) X kaksipaikkaiseksi relaatioksi $V(P) \subseteq X \times X$ (ks. esim. [52, s. 62–67)]). Tässä esityksessä P siis kuuluu predikaattilogiikan kielen aakkostoon, kun taas $V(P)$ (ja myös R) viittaa kaksipaikkaiseen relaatioon eli tiettyjen järjestettyjen parien joukkoon. Usein predikaattisymboleihin viitataan käyttämällä esimerkiksi kirjainta "R" metavariaabelina. Asiayhteydestä kuitenkin selviää, milloin "P", "R" yms. merkinnät viittaavat predikaattisymboleihin, milloin relaatioihin.

Malleissa $\langle X, V\rangle$, joissa kaava $\forall x P(x, x)$ on tosi, $V(P)$ on selvästikin oltava refleksiivinen. Matematiikan oppikirjoissa "refleksiivisyys" määritellään usein sanomalla, että relaatio $R \subseteq X \times X$ on refleksiivinen, jos $\forall x \in X\colon R(x, x)$. Näin tehtäessä tuntuu täysin triviaalilta sanoa, että kaava $\forall x P(x, x)$ määrittelee refleksiivisyyden. On kuitenkin huomattava, että jälkimmäinen kaava on predikaattilogiikan kaava, jonka merkitys selviää vasta tulkittaessa se malleissa. Sen sijaan lause $\forall x \in X\colon R(x, x)$ on puoliformaalia matemaattista kieltä, joka voitaisiin yhtä hyvin esittää pelkästään luonnollista kieltä käyttäen sanomalla esimerkiksi, että relaatio on refleksiivinen joukossa X, jos jokainen joukon X alkio on relaatiossa itsensä kanssa.

Kaava $\forall x P(x, x)$ määrittelee siis predikaattilogiikassa saman käsitteen kuin modaalilogiikassa (Kripke-semantiikkaa käytettäessä) kaava $\Box p \to p$. Tarkastelemme tässä luvussa tällaisia predikaattilogiikan ja modaalilogiikan korrespondenssi- eli vastaavuustuloksia. Tätä *korrespondenssiteoriaa* on ensimmäisenä systemaattisesti tutkinut van Benthem (ks. [61] ja viitteet siinä).

8.1 Vastaavuustuloksia

Lauseessa 37 on listattu muutama modaalilogiikan kaavan ja vaihtoehtorelaation ominaisuuden vastaavuus. Lauseessa puhutaan transitiivisista, symmetrisistä ja euklidisista relaatioista. Predikaattilogiikassa transitiivisuuden määrittelee kaava $\forall x \forall y \forall z\big(P(x, y) \wedge P(y, z) \to P(x, z)\big)$, symmetrisyyden kaava $\forall x \forall y\big(P(x, y) \to P(y, x)\big)$ ja euklidisuuden kaava $\forall x \forall y \forall z\big(P(x, y) \wedge P(x, z) \to P(y, z)\big)$.

Lause 37. *Olkoon $F = \langle W, R\rangle$. Tällöin*

$$F \vDash \Box p \to \Box\Box p \;\Leftrightarrow\; R \text{ on transitiivinen,} \qquad (C_4)$$

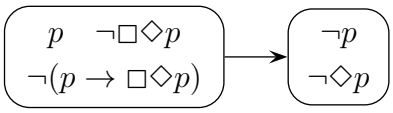
$$F \vDash p \to \Box\Diamond p \;\Leftrightarrow\; R \text{ on symmetrinen,} \qquad (C_B)$$

$$F \vDash \Diamond p \to \Box\Diamond p \;\Leftrightarrow\; R \text{ on euklidinen.} \qquad (C_5)$$

Todistus. Väitteiden (C_4), (C_B) ja (C_5) suunta "$\Leftarrow$" seuraa lauseista 24, 25 (s. 39) ja 28 (s. 41). Väitteen (C_B) suunnan "$\Rightarrow$" todistamiseksi oletamme, että R ei ole symmetrinen. On siis olemassa sellaiset maailmat w ja w', että wRw', mutta $w' \not R w$. Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ sellainen malli, että $P(p) = \{w\}$. Tällöin siis $M, w \vDash p$. Koska ei ole olemassa

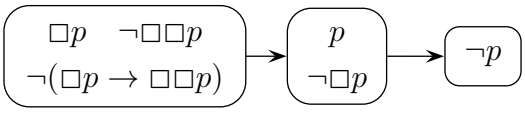
sellaista maailmaa w'', että $w'Rw''$ ja $M, w'' \vDash p$, niin $M, w' \nvDash \Diamond p$. Koska wRw', niin $M, w \nvDash \Box\Diamond p$. Siis $M, w \nvDash p \to \Box\Diamond p$.

Jos siis R ei ole symmetrinen, niin $\langle W, R\rangle \nvDash p \to \Box\Diamond p$.



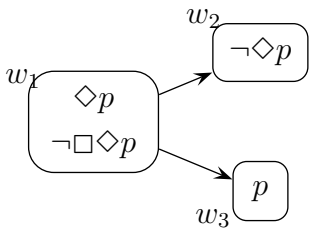
R ei symmetrinen

Kohdan (C_4) suunnan "$\Rightarrow$" täsmällisen todistamisen jätämme harjoitustehtäväksi ja esitämme vain siinä tarvittavaa konstruktiota havainnollistavan kuvion:



R ei transitiivinen

Todistamme lopuksi kohdan (C_5) suunnan "$\Rightarrow$". Jos R ei ole euklidinen, niin on olemassa sellaiset maailmat w_1, w_2 ja w_3, että w_1Rw_2 ja w_1Rw_3, mutta $w_2 \not R w_3$. Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ sellainen malli, jossa $P(p) = \{w_3\}$. Tällöin $M, w_1 \vDash \Diamond p$, mutta $M, w_2 \nvDash \Diamond p$. Siis $M, w_1 \nvDash \Box\Diamond p$ ja täten $M, w_1 \nvDash \Diamond p \to \Box\Diamond p$. Jos siis R ei ole euklidinen, niin $\langle W, R\rangle \nvDash \Diamond p \to \Box\Diamond p$.



R ei euklidinen

$\Box$

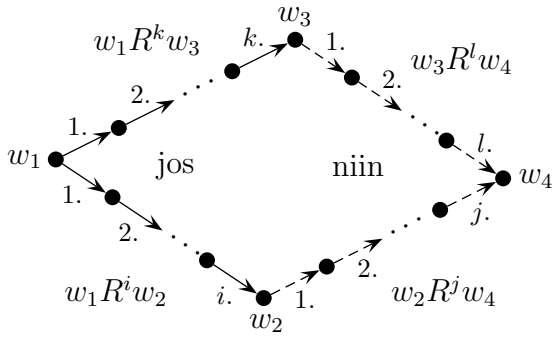
Tarkastelemme lopuksi skeemaa

$$\left(G^{i,j}_{k,l}\right) \qquad \Diamond^i\Box^j A \to \Box^k\Diamond^l A.$$

Tässä skeemassa siis ovat parametreina luonnolliset luvut $i, j, k, l \geq 0$; sovimme, että $\Box^0$ ja $\Diamond^0$ on tyhjä merkkijono. Useimmat tähän asti tarkastelemistamme skeemoista ovat sen erikoistapauksia, esimerkiksi skeema (T) on $\left(G^{0,1}_{0,0}\right)$.

Olkoon R^0 identtinen relaatio, $R^1 = R$, $R^2 = R \circ R$ (relaation R yhdistetty relaatio itsensä kanssa) ja yleisemmin $R^i = R \circ R^{i-1}$, kun $i > 2$. Määrittelemme skeemaa $\left(G^{i,j}_{k,l}\right)$ vastaavan vaihtoehtorelaation R ominaisuuden $\left(\begin{smallmatrix} i & k \\ j & l \end{smallmatrix}\right)$ (huomaa kirjainten järjestys) seuraavasti:

$$\forall w_1, w_2, w_3 \in W: \qquad \text{jos } w_1R^iw_2 \text{ ja } w_1R^kw_3, \\ \text{niin } \exists w_4 \in W: w_2R^jw_4 \text{ ja } w_3R^lw_4.$$



Esimerkki 39. Koska xR^0y tarkoittaa, että $x = y$, niin skeemaa $\left(G^{0,1}_{0,0}\right)$ vastaava ehto $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ on siis

$$\begin{aligned} \forall w_1, w_2, w_3 \in W\colon \qquad & \text{jos } w_1 = w_2 \text{ ja } w_1 = w_3, \\ & \text{niin } \exists w_4 \in W\colon w_2 R w_4 \text{ ja } w_3 = w_4, \end{aligned}$$

joka on varsin monimutkainen tapa ilmaista, että R on refleksiivinen (harjoitustehtävä).

Korrespondenssitulos (C_T) samoin kuin tulokset (C_B), (C_4) ja (C_5) ovat erikoistapauksia seuraavasta lauseesta, jonka todistuksen jätämme harjoitustehtäviksi.

Lause 38. (Ks. [9, s. 85–90].) *Olkoot $i, j, k, l \in \mathbb{N}$. Tällöin*

$$\langle W, R\rangle \vDash \Diamond^i \Box^j p \to \Box^k \Diamond^l p,$$

jos ja vain jos R toteuttaa ehdon $\left(\begin{smallmatrix} i & k \\ j & l \end{smallmatrix}\right)$.

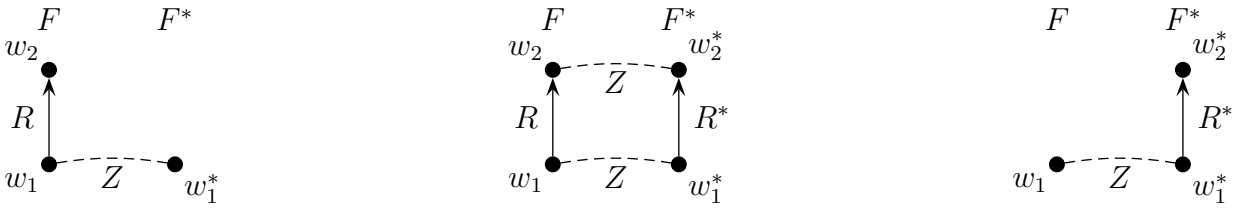
Relaatiolla R voi olla myös sellaisia ominaisuuksia, jotka eivät vastaa minkään modaalilogiikan kaavan validisuutta. Osoitamme myöhemmin (s. 69), että irrefleksiivisyys (siis se, että mikään alkio ei ole itsensä kanssa relaatiossa) on yksi esimerkki tällaisesta ominaisuudesta. Koska ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan kaava $\forall x \neg P(x, x)$ määrittelee ominaisuuden "irrefleksiivisyys", niin ainakin tässä tapauksessa ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikka on *ilmaisukyvyltään* voimakkaampi kuin modaalilogiikka. Tämän luvun lopussa annamme kuitenkin esimerkin myös vastakkaisesta tilanteesta: osoitamme, että on olemassa modaalilogiikan kaava, joka määrittelee relaation R sellaisen ominaisuuden, jota ei voi ilmaista ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikassa.

8.2 Bisimulaatio

Olkoon $F = \langle W, R\rangle$ ja $F^* = \langle W^*, R^*\rangle$. Tällöin epätyhjä relaatio $Z \subseteq W \times W^*$ on kehysten F ja F^* välinen *bisimulaatio*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

1. Jos $w_1 Z w_1^*$ ja $w_1 R w_2$, niin $\exists w_2^* \in W^*\colon w_2 Z w_2^*$ ja $w_1^* R^* w_2^*$.
2. Jos $w_1 Z w_1^*$ ja $w_1^* R^* w_2^*$, niin $\exists w_2 \in W\colon w_2 Z w_2^*$ ja $w_1 R w_2$.

Oheiset kuviot havainnollistavat näitä ehtoja:



Ehdon 1 alkuosa — Ehdot 1 ja 2 voimassa — Ehdon 2 alkuosa

Kehysten $\langle W, R\rangle$ ja $\langle W^*, R^*\rangle$ välinen bisimulaatio Z on mallien $\langle W, R, P\rangle$ ja $\langle W^*, R^*, P^*\rangle$ välinen bisimulaatio, jos lisäksi on voimassa:

3. Jos wZw^*, niin $M, w \vDash p_i \Leftrightarrow M^*, w^* \vDash p_i$ aina, kun $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Jos Z on bisimulaatio ja wZw^*, sanomme maailmojen w ja w^* olevan *bisimilaariset*. Seuraavan lauseen mukaan bisimilaarissa maailmoissa ovat tosia täsmälleen samat kaavat.

Lause 39. *Olkoon $Z \subseteq W \times W^*$ mallien $M = \langle W, R, P\rangle$ ja $M^* = \langle W^*, R^*, P^*\rangle$ välinen bisimulaatio. Jos maailmat $w \in W$ ja $w^* \in W^*$ ovat bisimilaariset, niin $M, w \vDash A$, jos ja vain jos $M^*, w^* \vDash A$, eli $Th(M, w) = Th(M^*, w^*)$.*

Todistus. Suoraan bisimulaation määritelmän mukaan $M, w \vDash p \Leftrightarrow M^*, w^* \vDash p$ aina, kun p on lausemuuttuja ja wZw^*. Tehdään induktio-oletus, että aina, kun wZw^*, niin

$$M, w \vDash B \Leftrightarrow M^*, w^* \vDash B$$

ja

$$M, w \vDash C \Leftrightarrow M^*, w^* \vDash C.$$

Tämän induktio-oletuksen perusteella saamme välittömästi, että aina, kun wZw^*,

$$M, w \vDash \neg B \Leftrightarrow M^*, w^* \vDash \neg B$$

ja

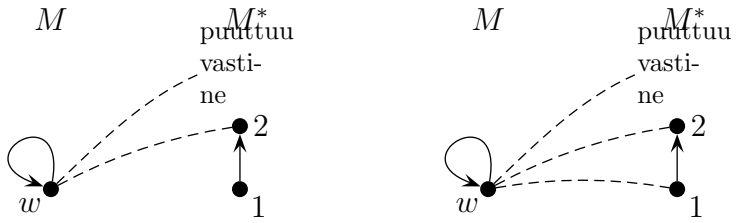
$$M, w \vDash B \wedge C \Leftrightarrow M^*, w^* \vDash B \wedge C.$$

Tarkastelemme lopuksi tapausta $A = \Box B$. Oletamme, että wZw^* ja $M, w \nvDash \Box B$. Tällöin siis on olemassa sellainen maailma $\hat{w}$, että $wR\hat{w}$ ja $M, \hat{w} \nvDash B$. Bisimulaation määritelmän mukaan on olemassa sellainen $\hat{w}^* \in W^*$, että $\hat{w}Z\hat{w}^*$ ja $w^*R^*\hat{w}^*$. Induktio-oletuksesta (sovellettuna bisimilaarisiin maailmoihin $\hat{w}$ ja $\hat{w}^*$) seuraa, että $M^*, \hat{w}^* \nvDash B$. Siis $M^*, w^* \nvDash \Box B$. Vastaavasti saadaan, että jos $M^*, w^* \nvDash \Box B$, niin $M, w \nvDash \Box B$. Näin saamme todistettua induktioväitteen

$$M, w \vDash \Box B \Leftrightarrow M^*, w^* \vDash \Box B \text{ aina, kun } wZw^*.$$

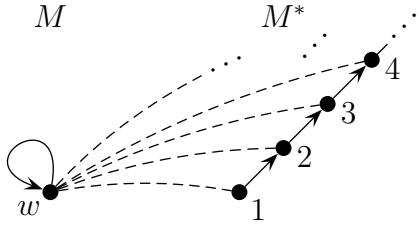
Lauseen tulos seuraa nyt induktioperiaatteesta. □

Esimerkki 40. Olkoon $F = \langle W, R\rangle$, jossa $W = \{w\}$ ja $R = \{\langle w, w\rangle\}$. Tarkastelemme ensin, voiko kehysten F ja $F^* = \langle W^*, R^*\rangle$, jossa $W^* = \{1, 2\}$ ja $R^* = \{\langle 1, 2\rangle\}$, välillä olla bisimulaatiota. Jos tällainen bisimulaatio Z olisi olemassa ja $wZ2$, pitäisi olla olemassa sellainen j, että $2R^*j$, sillä wRw, mutta tällaista j:tä ei ole. Jos olisi $wZ1$, olisi oltava myös $wZ2$, sillä wRw ja $1R^*j \Leftrightarrow j = 2$. Mutta päädymme tällöin samaan tilanteeseen kuin edellä.



Kehysten F ja F^* välillä ei voi siis olla bisimulaatiota.

Onkin helppo nähdä, että kehyksen F maailma w voi olla bisimilaarinen jonkin kehyksen $F' = \langle W', R'\rangle$ maailman $i_1 \in W'$ kanssa vain kun on olemassa sellaiset maailmat i_2, i_3, $i_4, \ldots$, että $i_1R'i_2$, $i_2R'i_3$, $i_3R'i_4$ jne.

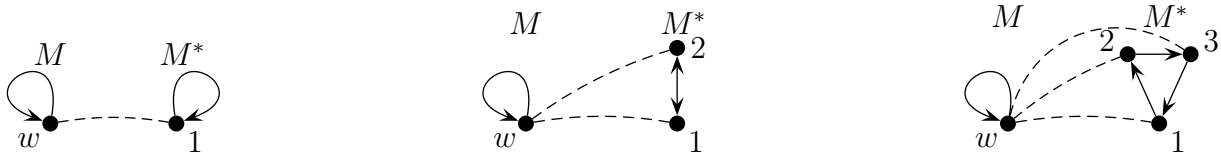


Jotta mallien $M = \langle F, P\rangle$ ja $M' = \langle F', P'\rangle$ välillä olisi bisimulaatio, on lisäksi oltava voimassa

$$M, w \vDash p_j \Leftrightarrow M^*, i_k \vDash p_j \quad (j = 1, 2, 3, \ldots;\ k = 1, 2, 3, \ldots).$$

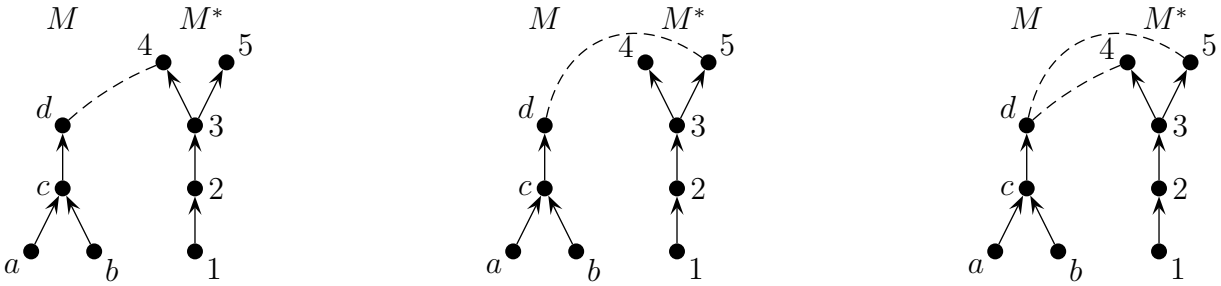
Tällöin jokaiselle kaavalle A pätee, että $M, w \vDash A$, jos ja vain jos $M^*, i_k \vDash A$.

Kaikki tai osa maailmoista i_1, i_2, $i_3, \ldots$ voivat kuitenkin olla samoja, tilanne voi olla esimerkiksi jokin seuraavista:

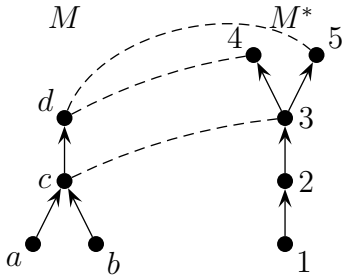


Esimerkki 41. Olkoon $W = \{a, b, c, d\}$, $R = \{\langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$, $W^* = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ja $R^* = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 3, 5\rangle\}$. Luettelemme kaikki mahdolliset kehysten $F = \langle W, R\rangle$ ja $F^* = \langle W^*, R^*\rangle$ väliset bisimulaatiot $Z \subseteq W \times W^*$.

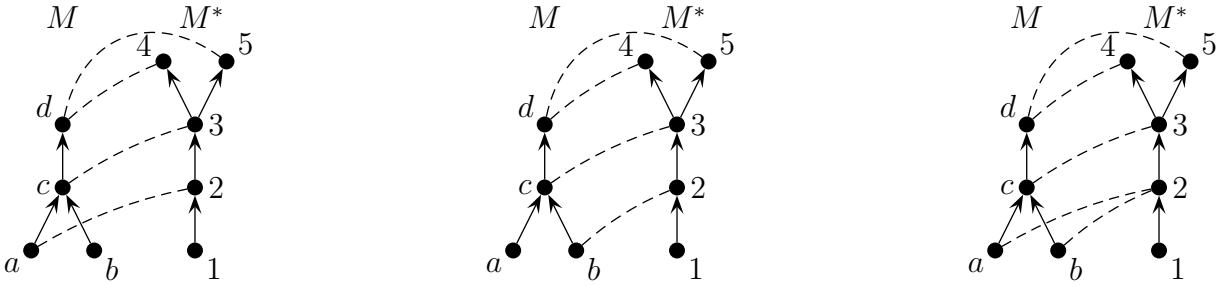
Maailma $d \in W$ voi olla bisimilaarinen maailman $4 \in W^*$ tai $5 \in W^*$ kanssa:



Maailma c voi olla bisimilaarinen maailman 3 kanssa. Koska cRd, $3R^*4$ ja $3R^*5$, niin sekä maailmojen d ja 4 että maailmojen d ja 5 on oltava tällöin bisimilaariset.



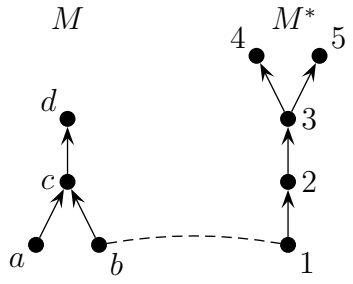
Maailmat a ja 2 ja maailmat b ja 2 voivat olla bisimilaarisia:



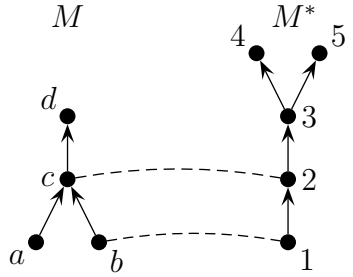
Jotta esimerkiksi kehysten F ja F^* välinen laajin mahdollinen bisimulaatio $Z = \{\langle a, 2\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 3\rangle, \langle d, 4\rangle, \langle d, 5\rangle\}$ olisi myös mallien $\langle F, P\rangle$ ja $\langle F^*, P^*\rangle$ välinen bisimulaatio, kaikkien lausemuuttujien p_i on toteutettava näissä malleissa seuraavat ehdot:

$$M, d \vDash p_i \Leftrightarrow M^*, 4 \vDash p_i \Leftrightarrow M^*, 5 \vDash p_i,$$
$$M, c \vDash p_i \Leftrightarrow M^*, 3 \vDash p_i,$$
$$M, a \vDash p_i \Leftrightarrow M, b \vDash p_i \Leftrightarrow M^*, 2 \vDash p_i.$$

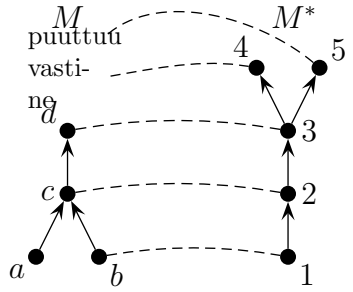
Mutta onko yllä tosiaan käsitelty kaikki mahdollisuudet? Voisiko esimerkiksi olla olemassa sellaista bisimulaatiota Z, että $bZ1$?



Jos tällainen bisimulaatio Z olisi olemassa, olisi oltava myös $cZ2$, sillä bRc ja maailmalla 1 ei ole muita vaihtoehtoisia maailmoja kuin maailma 2.



Koska cRd, niin edelleen pitäisi olla $dZ3$. Mutta $3R^*4$ ja $3R^*5$, joten pitäisi myös löytyä sellaiset kehyksen F maailmat w ja w', että dRw, dRw', $wZ4$ ja $w'Z5$. Tämä on kuitenkin mahdotonta:



Vastaavalla tavalla voimme osoittaa, että ei voi olla olemassa sellaista bisimulaatiota Z, että $aZ1$, $cZ1$, $cZ2$, $dZ3$ tms.

Bisimulaatiota voidaan hyödyntää osoitettaessa, että mikään modaalilogiikan kaava ei määrittele annettua vaihtoehtorelaation ominaisuutta $\mathcal{O}$. Kutsumme tässä $\mathcal{O}$-malliksi sellaista mallia, jonka vaihtoehtorelaatiolla on ominaisuus $\mathcal{O}$. Olkoon M jokin sellainen malli, joka ei ole $\mathcal{O}$-malli. Jos aina, kun w on sen maailma, pystymme konstruoimaan

sellaisen $\mathcal{O}$-mallin M_w^* ja sen maailman w^*, että maailmat w ja w^* ovat bisimilaariset, niin mikään modaalilogiikan kaava ei määrittele ominaisuutta $\mathcal{O}$. Nimittäin jos kaava A määrittelisi ominaisuuden $\mathcal{O}$, niin $M \not\models A$. Tällöin siis on olemassa sellainen maailma w_0, että $M, w_0 \not\models A$. Mutta jos kerran on olemassa tämän maailman w_0 kanssa bisimilaarinen $\mathcal{O}$-mallin $M_{w_0}^*$ maailma w_0^*, niin myös $\mathcal{O}$-mallissa $M_{w_0}^* \not\models A$ (lause 39). Täten kaava A ei voi määritellä ominaisuutta $\mathcal{O}$.

Todistamme tällä tekniikalla, että mikään modaalilogiikan kaava ei määrittele irrefleksiivisyyttä. Tätä ennen annamme kuitenkin esimerkkejä mallien välisistä bisimulaatioista. Esimerkeissä esiintyvät muotoa

$$M, w \models A \Leftrightarrow M^*, w^* \models A$$

olevat väitteet voimme todistaa suoraan induktiolla kaavan A pituuden suhteen. Sivuutamme nämä yksittäiset induktiotodistukset (lukija voi ne harjoitusmielessä tehdä), sillä saamme nämä tulokset erikoistapauksina lauseesta 39 maailmojen w ja w^* bisimilaarisuuden perusteella. Lukijan, joka haluaa syvällisemmin ymmärtää tässä käsiteltyjen asioiden teoreettisen taustan, kannattaa perehtyä alaluvun päälähteeseen [3, luku 2].

Esimerkki 42. Olkoon annettu mallit $M_1 = \langle W_1, R_1, P_1 \rangle$ ja $M_2 = \langle W_2, R_2, P_2 \rangle$, joissa $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Mallien M_1 ja M_2 *erillinen yhdiste* on malli $M^* = \langle W_1 \cup W_2, R_1 \cup R_2, P^* \rangle$, jossa $P^*(p_i) = P_1(p_i) \cup P_2(p_i)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

Relaatio $Z = \{ \langle w, w \rangle \mid w \in W_1 \}$ on mallien M_1 ja M^* välinen bisimulaatio (harjoitustehtävä). Lauseen 39 perusteella siis $M^*, w \models A \Leftrightarrow M_1, w \models A$ aina, kun $w \in W_1$.

Analoginen tulos pätee tietenkin myös mallin M_2 kohdalla. Tämän esimerkin tulos yleistyy tapauksiin, joissa malleja M_i on useampi kuin kaksi. Malleja voi olla ääretönkin määrä, oleellista on se, että kaikkien mallien mahdollisten maailmojen joukot ovat pareittain erillisiä.

Esimerkki 43. Mallien $M = \langle W, R, P \rangle$ ja $M^* = \langle W^*, R^*, P^* \rangle$ sanotaan olevan *isomorfiset*, jos on olemassa sellainen bijektio $f \colon W \to W^*$, että

$$\forall w_1 \in W : \forall w_2 \in W : w_1 R w_2 \Leftrightarrow f(w_1) R^* f(w_2)$$

ja

$$P^*(p_i) = f\big(P(p_i)\big) \stackrel{\text{def}}{=} \{ f(w) \mid w \in P(p_i) \}.$$

Sanomme tällöin, että f on isomorfismi mallilta M mallille M^*.

Isomorfiset mallit ovat muuten täsmälleen samat paitsi että maailmat on nimetty eri tavalla. Helposti induktiolla kaavan pituuden suhteen voidaan osoittaa (harjoitustehtävä), että isomorfisissa malleissa M ja M^*

$$M, w \models A \Leftrightarrow M^*, f(w) \models A.$$

Tämä tulos saadaan myös lauseen 39 perusteella, sillä triviaalisti $Z = \{ \langle w, f(w) \rangle \mid w \in W \}$ on mallien M ja M^* välinen bisimulaatio.

Esimerkin 43 kuvaus f on bijektio, ja joukot W ja W^* ovat siis yhtä mahtavia. Esimerkin tulos olisi voimassa myös silloin, jos joukossa W^* olisi "ylimääräisiä" alkioita ja f olisi vain injektio, ei surjektio. Kuvauksen f ei tarvitse olla injektiokaan. Kunhan vain ehdot

$$P^*(p_i) = f\big(P(p_i)\big)$$

ja

$$\forall w_1 \in W : \forall w_2 \in W : w_1 R w_2 \Leftrightarrow f(w_1) R^* f(w_2)$$

ovat voimassa, niin maailmoissa $w \in W$ ja $f(w) \in W^*$ ovat tosia samat kaavat. Itse asiassa riittää edellyttää, että kuvaus f toteuttaa ehdot

$$\forall w_1 \in W : \forall w_2 \in W : w_1 R w_2 \Rightarrow f(w_1) R^* f(w_2), \tag{f1}$$

$$\begin{aligned} &\forall w_1 \in W : \forall w^* \in W^* : \\ &\qquad f(w_1) R^* w^* \Rightarrow \exists w \in W : w_1 R w \text{ ja } f(w) = w^*. \end{aligned} \tag{f2}$$

Käytämme Segerbergin [58] käyttöönottamaa nimitystä *pseudoepimorfismi*, lyhyesti *p-morfismi*, nämä ehdot toteuttavalle kuvaukselle. Jos p-morfismeista puhutaan mallien yhteydessä, ehtojen (f1) ja (f2) lisäksi tarvitaan ehto $P^*(p_i) = f(P(p_i))$. Kun f on p-morfismi mallilta M mallille M^*, niin $Z = \{\, \langle w, f(w)\rangle \mid w \in W \,\}$ on mallien M ja M^* välinen bisimulaatio (harjoitustehtävä).

Esimerkki 44. (Vrt. [3, s. 59–60].) Tarkastellaan malleja $M = \langle \mathbb{N}, R, P\rangle$ ja $M^* = \langle \{w_1, w_2\}, R^*, P^*\rangle$, jossa

$$\begin{gathered} R = \{\, \langle m, m+1\rangle \mid m \in \mathbb{N} \,\}, \\ R^* = \{\langle w_1, w_2\rangle, \langle w_2, w_1\rangle\}, \\ P(p_i) = \{0, 2, 4, \ldots\}, \quad P^*(p_i) = \{w_2\} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots). \end{gathered}$$

Olkoon f kuvaus $f\colon \mathbb{N} \to \{w_1, w_2\}$,

$$f(n) = \begin{cases} w_1, & \text{kun } n \text{ on pariton,} \\ w_2, & \text{kun } n \text{ on parillinen.} \end{cases}$$

Kuvaus f ei toteuta ehtoa

$$mRn \Leftrightarrow f(m) R^* f(n),$$

sillä esimerkiksi $f(0) R^* f(3)$, mutta $0 \not R 3$. Voimme kuitenkin todistaa, etä kuvaus f on p-morfismi (harjoitustehtävä). Koska maailmat w ja $f(w)$ ovat bisimilaariset, niin lauseen 39 perusteella $M, w \vDash A \Leftrightarrow M^*, f(w) \vDash A$.

Esimerkeissä 42–44 olemme tarkastelleet erillisiä yhdisteitä ja p-morfismeja. Kolmantena esimerkkityyppinä käsittelemme generoitua alimallia. Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ ja $w \in W$. Tällöin *maailman w generoima alimalli* on malli $M^* = \langle W^*, R^*, P^*\rangle$, jossa $W^* \subseteq W$ on pienin sellainen joukko, joka toteuttaa ehdot

$$\begin{gathered} w \in W^*, \\ w_1 \in W^* \text{ ja } w_1 R w_2 \Rightarrow w_2 \in W^*, \end{gathered}$$

$R^* = R \cap (W^* \times W^*)$ ja $P^*(p_i) = P(p_i) \cap W^*$. Mallien M ja M^* väliseksi bisimulaatioksi voimme nyt ottaa relaation $Z = \{\, \langle w', w'\rangle \mid w' \in W^* \,\}$ (harjoitustehtävä).

Esimerkki 45. Olkoon $M = \langle \mathbb{Z}, R, P\rangle$, jossa

$$R = \{\, \langle m, n\rangle \mid m, n \in \mathbb{Z},\ m < n \,\}.$$

Tarkastellaan alkion 0 generoimaa alimallia $M^* = \langle W^*, R^*, P^*\rangle$. Helposti nähdään, että $W^* = \mathbb{N}$ ja että mR^*n, jos ja vain jos $m, n \in \mathbb{N}$ ja $m < n$, ja että relaatio $Z = \{\, \langle n, n\rangle \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ on mallien M ja M^* välinen bisimulaatio. Suoraan induktiolla kaavan A pituuden suhteen tai lauseen 39 avulla saadaan, että $M^*, n \vDash A \Leftrightarrow M, n \vDash A$ aina, kun $n \in \mathbb{N}$.

8.3 ”Vastaamattomuustuloksia”

Osoitamme nyt, että mikään modaalilogiikan kaava ei määrittele vaihtoehtorelaation irrefleksiivisyyttä. Teemme vastaoletuksen: on olemassa sellainen kaava A, että

$$\langle W^*, R^* \rangle \vDash A \Leftrightarrow R^* \text{ on irrefleksiivinen.}$$

Olkoon kehys $F = \langle W, R \rangle$, jossa $W = \{w\}$ ja $R = \{\langle w, w \rangle\}$. Koska kehyksen F vaihtoehtorelaatio ei ole irrefleksiivinen, niin vastaoletuksen perusteella $F \nvDash A$ eli on olemassa sellainen malli $M = \langle F, P \rangle$, että $M, w \nvDash A$ (maailma w on mallin M ainoa maailma, joten muita vaihtoehtoja ei tässä tapauksessa ole).

Konstruoidaan malli $M^* = \langle W^*, R^*, P^* \rangle$, jossa $W^* = \{w_0, w_1\}$,

$$P^*(p_i) = \begin{cases} W^*, & \text{jos } P(p_i) = \{w\}, \\ \emptyset, & \text{jos } P(p_i) = \emptyset, \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

ja $R^* = \{\langle w_0, w_1 \rangle, \langle w_1, w_0 \rangle\}$.

Relaatio $Z = \{\langle w, w_0 \rangle, \langle w, w_1 \rangle\} \subseteq W \times W^*$ on mallien M ja M^* välinen bisimulaatio, joten $M^*, w_0 \nvDash A$ (tämän voimme tietysti todistaa suoraankin vetoamatta bisimulaatiota koskevaan lauseeseen 39, miten?). Siis vaikka R^* on irrefleksiivinen, niin $\langle W^*, R^* \rangle \nvDash A$, ja tämä on ristiriidassa vastaoletuksen kanssa. Mikään modaalilogiikan kaava ei siis määrittele irrefleksiivisyyttä. Harjoitustehtävissä on lisäesimerkkejä sellaisista vaihtoehtorelaation ominaisuuksista, joita mikään modaalilogiikan kaava ei määrittele.

Tämän alaluvun lopuksi annamme esimerkin tilanteesta, jossa modaalilogiikan kaava määrittelee vaihtoehtorelaation sellaisen ominaisuuden, jota ei voi määritellä ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikalla. Tarkastelemme skeemaa[8]

$$(L) \qquad \Box(\Box A \to A) \to \Box A.$$

Kutsumme *R-poluksi* jonoa $\langle w_1, w_2, \ldots, w_n \rangle$, jossa $w_i R w_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Polku voi olla myös ääretön, ja polun määritelmässä sallitaan alkioiden toisto eli se, että $w_i = w_j$, vaikka $i \neq j$. Voimme todistaa (harjoitustehtävä), että skeema (L) on validi kaikissa sellaisissa kehyksissä $\langle W, R \rangle$, joissa relaatio R on transitiivinen ja joissa ei ole ääretöntä R-polkua. Jälkimmäinen ehto tarkoittaa joukko-opin kielellä, että vaihtoehtorelaation käänteisrelaatio R^{-1} on *hyvin perustettu* (well-founded).

Alla on esimerkkejä malleista, joissa kaava $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ ei ole validi. Ensimmäisessä mallissa relaatio R ei ole transitiivinen, toisessa mallissa on ääretön R-polku.

Esimerkki 46. Olkoon $W = \{0, 1, 2\}$ ja $R_1 = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$. Kun $P(p) = \emptyset$, niin mallissa $M_1 = \langle W, R_1, P \rangle$ pätee, että $M, 0 \vDash \Box(\Box p \to p)$, mutta $M, 0 \nvDash \Box p$, joten skeema (L) ei ole validi mallissa M_1.

Olkoon sitten $R_2 = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}$, jolloin myös mallissa $M_2 = \langle W, R_2, P \rangle$ pätee, että

$$M, 0 \nvDash \Box(\Box p \to p) \to \Box p.$$

Vaikka R_2 onkin transitiivinen, se ei toteuta toista relaatiolle R asetettua ehtoa, vaan $w_i R_2 w_{i+1}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, kun valitaan esimerkiksi $w_1 = w_2 = w_3 = \cdots = 0$.

[8] Tälle skeemalle on kirjallisuudessa annettu eri lyhenteitä, kuten (L) (nimestä Löb), (W) ja (G) (nimestä Gödel).

Jätämme harjoitustehtäväksi sen todistamisen, että kaava $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ ei ole validi missään sellaisessa kehyksessä, jossa vaihtoehtorelaatio ei ole transitiivinen. Todistamme tässä, että jos kehyksessä $F = \langle W, R\rangle$ on ääretön R-polku, niin silloinkaan skeema (L) ei ole validi kehyksessä F.

Oletamme, että kehyksessä F on ääretön R-polku $\langle w_1, w_2, w_3, \ldots\rangle$. Määrittelemme

$$P(p) = W \setminus \{w_1, w_2, w_3, \ldots\}.$$

Olkoon $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Koska $M, w_{i+1} \nvDash p$, niin $M, w_i \nvDash \Box p$. Tästä seuraa, että $M, w_i \vDash \Box p \to p$. Jos $w \notin \{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$, niin kuvauksen P määritelmän mukaan $M, w \vDash p$ ja tällöinkin $M, w \vDash \Box p \to p$. Koska siis $M, w \vDash \Box p \to p$ aina, kun $w \in W$, niin $M, w_1 \vDash \Box(\Box p \to p)$ ja täten $M, w_1 \nvDash \Box(\Box p \to p) \to \Box p$. Tämän osatodistuksen ja harjoitustehtävien avulla saamme seuraavan tuloksen:

Lause 40. *Kaava $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ on validi kehyksessä $\langle W, R\rangle$, jos ja vain jos R on transitiivinen ja kaikki R-polut ovat äärellisiä.*

Kompaktisuuslauseen[9] avulla voimme todistaa, että ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikassa ei ole olemassa sellaista kaavaa, joka määrittelisi lauseen 40 mukaisen vaihtoehtorelaation ominaisuuden (jätämme tämän todistuksen harjoitustehtäväksi niille lukijoille, jotka ovat perehtyneet predikaattilogiikan malliteoriaan).

Modaalilogiikan kaava $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ määrittelee siis sellaisen vaihtoehtorelaation ominaisuuden, joka ei ole ilmaistavissa ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan kielellä. Toinen vastaava esimerkki on kaava $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$ (ks. [3, s. 133]). Kun toisaalta kaikkia predikaattilogiikassa ilmaistavissa olevia ominaisuuksia ei voi määritellä modaalilogiikan kaavojen avulla, modaalilogiikkaa ja ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikkaa ei voi asettaa paremmuusjärjestykseen niiden ilmaisukyvyn suhteen.

9 Täydellisyys

Merkitsemme kuten edellä, että $\mathbf{KS} = \mathbf{KS_1} \ldots \mathbf{S_n}$. Sivuilla 57–59 esittämämme luotettavuustodistuksen perusteella on voimassa

$$\text{jos } \vdash_{\mathbf{KS}} A, \text{ niin } \vDash_{\mathbf{KS}} A.$$

Tässä "$\vDash_{\mathbf{KS}}$" viittaa validisuuteen luokassa $\mathcal{C}$, jonka muodostavat sellaiset Kripke-kehykset, joissa skeemat $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ovat valideja. Kun tiedossamme on, mikä vaihtoehtorelaation R ominaisuus $\mathcal{O}_i$ vastaa skeemaa S_i ekvivalenssin "$\langle W, R\rangle \vDash S_i \Leftrightarrow \mathcal{O}_i(R)$" mukaisesti, niin luokkaa $\mathcal{C}$ voi luonnehtia myös kaikkien sellaisten Kripke-kehysten luokaksi, joissa vaihtoehtorelaatiolla on ominaisuudet $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_n$.

Alamme todistaa systeemien täydellisyyttä eli käänteistä implikaatiota

$$\text{jos } \vDash_{\mathbf{KS}} A, \text{ niin } \vdash_{\mathbf{KS}} A.$$

Täydellisyyttä ei voi kuitenkaan todistaa yleisesti kaikille normaaleille modaalilogiikoille **KS**, vaan eri systeemejä on tarkasteltava erikseen. Esitämme yleisen menettelytavan, jota soveltamalla saamme täydellisyystulokset muun muassa systeemeille **K**, **T**, **S4** ja **S5**.

[9] Olkoon $\mathbf{\Sigma}$ (ääretön) joukko predikaattilogiikan kaavoja. Jos jokaisella joukon $\mathbf{\Sigma}$ äärellisellä osajoukolla on malli (eli on olemassa sellainen malli, jossa jokainen kyseisen joukon kaava on tosi), niin predikaattilogiikan kompaktisuuslauseen mukaan myös kaavajoukolla $\mathbf{\Sigma}$ on malli.

Tässä menettelytavassa konstruoimme ensin systeemin $\mathbf{\Sigma}$ ns. *kanonisen mallin* M_Σ, jolla todistamme olevan ominaisuuden $Th(M_\Sigma) = \mathbf{\Sigma}$. Kanonisessa mallissa M_Σ ovat siis valideja systeemin $\mathbf{\Sigma}$ teoreemat ja vain ne. Jokaiselle systeemillä[10] on tällainen kanoninen malli. Kanonisen mallin kehysosaa F_Σ kutsumme systeemin $\mathbf{\Sigma}$ *kanoniseksi kehykseksi.*

Jos $F_\Sigma \vDash A$, niin erityisesti $M_\Sigma \vDash A$ ja täten $A \in \mathbf{\Sigma}$. Siis $Th(F_\Sigma) \subseteq \mathbf{\Sigma}$. Jos on voimassa myös $\mathbf{\Sigma} \subseteq Th(F_\Sigma)$ eli kanoninen kehys F_Σ on kehys systeemille $\mathbf{\Sigma}$, niin $\mathbf{\Sigma} = Th(F_\Sigma)$. Tällöin sanomme systeemin $\mathbf{\Sigma}$ olevan *kanoninen systeemi.* Esimerkiksi systeemit **K**, **T**, **S4** ja **S5** ovat kanonisia.

Olkoon systeemi $\mathbf{\Sigma}$ luotettava luokan $\mathcal{C}$ suhteen: $\vdash_\Sigma A \Rightarrow \vDash_\mathcal{C} A$. Jos lisäksi kanoninen kehys F_Σ kuuluu luokkaan $\mathcal{C}$, niin myös käänteinen implikaatio on voimassa. Jos nimittäin $\vDash_\mathcal{C} A$, niin erityisesti $F_\Sigma \vDash A$. Oletuksen mukaan $F_\Sigma \in \mathcal{C}$ on kehys systeemille $\mathbf{\Sigma}$, joten $F_\Sigma \vDash A$, jos ja vain jos $\vdash_\Sigma A$. Täten systeemi $\mathbf{\Sigma}$ on myös täydellinen luokan $\mathcal{C}$ suhteen. Olemme näin todistaneet seuraavan lauseen.

Lause 41. *Olkoon $\mathcal{C}$ kehysten luokka ja* **KS** *normaali modaalilogiikka. Jos systeemin* **KS** *kanoninen kehys kuuluu luokkaan $\mathcal{C}$ ja systeemi* **KS** *on luotettava luokan $\mathcal{C}$ suhteen, niin luokka $\mathcal{C}$ determinoi systeemin* **KS**.

Tästä lauseesta saadaan suoraan seurauslause:

Lause 42. *Olkoon $\mathcal{O}$ ominaisuuksien $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2, \ldots$ ja $\mathcal{O}_n$ yhdistelmä. Jos*

$$\langle W, R\rangle \vDash S_i \Leftrightarrow \mathcal{O}_i(R),\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

ja systeemin **KS** *kanonisen kehyksen vaihtoehtorelaatiolla on ominaisuus $\mathcal{O}$, niin luokka $\{\, \langle W, R\rangle \mid \mathcal{O}(R) \,\}$ determinoi systeemin* **KS**.

On olemassa kuitenkin sellaisiakin systeemejä, joiden täydellisyyttä ei voi tällä tekniikalla todistaa. Eräs tällainen systeemi saadaan lisäämällä systeemiin **K** aksioomaskeema $(L)\ \Box(\Box A \to A) \to \Box A$. Voidaan todistaa (ks. [25, s. 100–103 ja s. 145–148]), että kaikkien äärellisten, transitiivisten ja irrefleksiivisten Kripke-kehysten luokka determinoi systeemin **KL**, mutta että systeemi **KL** ei ole kanoninen.

On olemassa myös systeemejä, jotka eivät ole täydellisiä minkään kehysten luokan suhteen (mallien kohdalla tilanne on eri.) Eräs tällainen systeemi on van Benthemin konstruoima systeemi, joka saadaan lisäämällä systeemiin **K** aksioomaskeema

$$\Diamond\Box A \vee \Box\big(\Box(\Box B \to B) \to B\big). \qquad (VB)$$

Voidaan todistaa (ks. [25, s. 57–62]) että mikään Kripke-mallien luokka ei determinoi tätä systeemiä.

Varsinaisten täydellisyystulosten todistamisissa tarvitsemme muutamia aputuloksia, joiden perusteella pystymme konstruoimaan kanonisia kehyksiä F_Σ eri systeemeille $\mathbf{\Sigma}$ ja osoittamaan, että kanonisella mallilla on ominaisuus $Th(M_\Sigma) = \mathbf{\Sigma}$. Kanonisen kehyksen mahdolliset maailmat ovat tietynlaisia kaavajoukkoja, joita nyt alamme tutkia.

[10] Määritelmämme mukaan kaikkien kaavojen joukko ei ole systeemi. Ei ole olemassa tietenkään sellaista mallia M, että $Th(M)$ on kaikkien kaavojen joukko.

9.1 Maksimaalinen ristiriidattomuus

Olkoon $\mathbf{\Sigma}$ normaali modaalilogiikka. Määrittelemme, että

> kaavajoukko Ω on Σ-*ristiriitainen*, jos on olemassa sellainen joukon Ω (äärellinen) osajoukko $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, että $\vdash_\Sigma \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n)$.

Muussa tapauksessa joukkoa Ω sanotaan Σ-*ristiriidattomaksi*.

Yhden kaavan muodostama joukko $\{A\}$ on Σ-ristiriitainen, jos ja vain jos $\vdash_\Sigma \neg A$. Joukko Ω on esimerkiksi silloin Σ-ristiriitainen, kun on olemassa sellainen kaava A, että $A \in \Omega$ ja $\neg A \in \Omega$. Ristiriidattomaan kaavajoukkoon voi kuulua siis korkeintaan toinen kaavoista A ja $\neg A$. Määrittelemme, että

> kaavajoukko Ω on *maksimaalinen*, jos aina kun A on kaava, niin $A \in \Omega$ tai $\neg A \in \Omega$.

Kaavajoukkoa, joka on sekä Σ-ristiriidaton että maksimaalinen, kutsumme *maksimaalisesti* Σ-*ristiriidattomaksi* kaavajoukoksi. Maksimaalisesti Σ-ristiriidaton lausejoukko voitaisiin yhtäpitävästi määritellä Σ-ristiriidattomaksi lausejoukoksi, jonka jokainen aito laajennus on Σ-ristiriitainen.

Tutkimme tässä luvussa maksimaalisesti ristiriidattomien kaavajoukkojen ominaisuuksia ja todistamme *Lindenbaumin lemman*, jonka mukaan jokainen Σ-ristiriidaton kaavajoukko on laajennettavissa maksimaalisesti Σ-ristiriidattomaksi kaavajoukoksi.

Lause 43. *Olkoon Γ maksimaalisesti Σ-ristiriidaton kaavajoukko. Tällöin on voimassa*

1. *joko $A \in \Gamma$ tai $\neg A \in \Gamma$,*
2. *$A \wedge B \in \Gamma$, jos ja vain jos $A \in \Gamma$ ja $B \in \Gamma$,*
3. *$\mathbf{\Sigma} \subseteq \Gamma$.*

Todistus. Kohta (a) seuraa suoraan määritelmistä ja jätämme sen todistuksen harjoitustehtäväksi.

Kohta (b): Oletamme ensin, että $A \wedge B \in \Gamma$. Jos olisi esimerkiksi $A \notin \Gamma$, niin kohdan (a) perusteella $\neg A \in \Gamma$. Lauselogiikan perusteella $\vdash_\Sigma \neg\big(\neg A \wedge (A \wedge B)\big)$, joten Γ olisi vastoin oletusta ristiriitainen. Jos siis $A \wedge B \in \Gamma$, niin $A \in \Gamma$ ja $B \in \Gamma$.

Oletamme kääntäen, että $A \in \Gamma$ ja $B \in \Gamma$. Koska lauselogiikan perusteella $\vdash_\Sigma \neg\big(A \wedge B \wedge \neg(A \wedge B)\big)$ ja Γ on ristiriidaton, niin $\neg(A \wedge B) \notin \Gamma$. Kohdan (a) perusteella tällöin $A \wedge B \in \Gamma$. Kohta (b) on näin todistettu.

Kohta (c): Olkoon $A \in \mathbf{\Sigma}$, jolloin siis $\vdash_\Sigma A$. Koska Γ on Σ-ristiriidaton, niin tällöin $\neg A \notin \Gamma$. Kohdan (a) perusteella saamme, että $A \in \Gamma$. Näin olemme todistaneet, että $\mathbf{\Sigma} \subseteq \Gamma$. □

Todistamme seuraavaksi, että jokainen Σ-ristiriidaton kaavajoukko voidaan laajentaa maksimaalisesti Σ-ristiriidattomaksi kaavajoukoksi.

Lause 44 (Lindenbaumin lemma)**.** *Oletetaan, että kaavajoukko Ω on Σ-ristiriidaton. Tällöin on olemassa sellainen maksimaalisesti Σ-ristiriidaton kaavajoukko Γ, että $\Omega \subseteq \Gamma$.*

Todistus. Koska tarkastelemamme kielet ovat numeroituvia, voimme muodostaa luettelon

$$A_1, A_2, A_3, \ldots,$$

jossa jokainen kielemme kaava esiintyy. Tämä kaavojen numerointi voidaan luonnollisesti tehdä mielivaltaisen monella eri tavalla; oletamme tässä kiinnitetyksi jonkin numerointitavan. Muodostamme kaavajoukot

$$\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \cdots$$

seuraavasti: $\Gamma_0 = \Omega$ ja

$$\Gamma_{i+1} = \begin{cases} \Gamma_i \cup \{A_i\}, & \text{jos } \Gamma_i \cup \{A_i\} \text{ on } \Sigma\text{-ristiriidaton,} \\ \Gamma_i \cup \{\neg A_i\} & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Todistamme ensin induktiolla, että Γ_i $(i \geq 0)$ on Σ-ristiriidaton. Koska $\Gamma_0 = \Omega$, niin Γ_0 on Σ-ristiriidaton. Oletamme, että Γ_k on Σ-ristiriidaton, ja teemme vastaoletus: Γ_{k+1} on Σ-ristiriitainen. Tällöin sekä $\Gamma_k \cup \{A_k\}$ että $\Gamma_k \cup \{\neg A_k\}$ ovat Σ-ristiriitaisia. Koska Γ_k on Σ-ristiriidaton, niin tällöin on siis olemassa sellaiset $B_1, B_2, \ldots, B_m \in \Gamma_k$ ja $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \Gamma_k$, että

$$\vdash_\Sigma \neg(B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_m \wedge A_k)$$

ja

$$\vdash_\Sigma \neg(C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge \neg A_k).$$

Merkitsemme $B = (B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_m)$ ja $C = (C_1 \wedge C_2 \cdots \wedge C_n)$. Koska

$$\neg(B \wedge A_k) \to \big(\neg(C \wedge \neg A_k) \to \neg(B \wedge C)\big)$$

on tautologia, niin

$$\vdash_\Sigma \neg(B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_m \wedge C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n).$$

Siis myös Γ_k olisi Σ-ristiriitainen, joten vastaoletus on väärä ja Γ_{k+1} on Σ-ristiriidaton.

Merkitsemme

$$\Gamma = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i.$$

Tällöin $\Omega = \Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ja Γ on maksimaalinen, sillä $A_i \in \Gamma_{i+1} \subseteq \Gamma$ tai $\neg A_i \in \Gamma_{i+1} \subseteq \Gamma$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Todistamme vielä, että Γ on Σ-ristiriidaton. Teemme vastaoletuksen: Γ on Σ-ristiriitainen. Tällöin on siis olemassa sellaiset kaavat $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m} \in \Gamma$, että

$$\vdash_\Sigma \neg(A_{i_1} \wedge A_{i_2} \wedge \cdots \wedge A_{i_m}).$$

Koska $A_{i_j} \in \Gamma$, niin $A_{i_j} \in \Gamma_{i_j+1}$. Olkoon $n = \max\{i_1 + 1, i_2 + 1, \ldots, i_m + 1\}$. Tällöin $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}\} \subseteq \Gamma_n$. Mutta tällöin myös Γ_n olisi ristiriitainen, joten vastaoletus on väärä. $\square$

Lauseen 44 perusteella siis jokainen Σ-ristiriidaton kaavajoukko voidaan laajentaa maksimaalisesti Σ-ristiriidattomaksi joukoksi. Jos $A \notin \mathbf{\Sigma}$, niin myös $\neg\neg A \notin \mathbf{\Sigma}$, jolloin siis $\nvdash_\Sigma \neg\neg A$ ja täten joukko $\{\neg A\}$ on Σ-ristiriidaton. On siis olemassa maksimaalisesti Σ-ristiriidaton kaavajoukko $\Gamma' \supset \{\neg A\}$. Lauseen 43 kohdan (1) perusteella $A \notin \Gamma'$, joten

$$A \notin \bigcap_{\Gamma \in \mathcal{M}_\Sigma} \Gamma,$$

missä $\mathcal{M}_\Sigma$ on kaikkien maksimaalisesti Σ-ristiriidattomien kaavajoukkojen joukko. Toisaalta jos $A \in \mathbf{\Sigma}$, niin lauseen 43 kohdan (3) perusteella

$$A \in \bigcap_{\Gamma \in \mathcal{M}_\Sigma} \Gamma.$$

Seuraava lause on siis voimassa.

Lause 45. *Olkoon $\mathcal{M}_\Sigma$ kaikkien maksimaalisesti Σ-ristiriidattomien kaavajoukkojen joukko. Tällöin*

$$\bigcap_{\Gamma \in \mathcal{M}_\Sigma} \Gamma = \mathbf{\Sigma}.$$

Esitämme vielä seuraavan käyttökelpoisen aputuloksen, jonka todistuksen jätämme harjoitustehtäväksi.

Lause 46. *Jos $\vdash_\Sigma A \leftrightarrow B$ (eli $A \leftrightarrow B \in \mathbf{\Sigma}$), niin $A \in \mathbf{\Sigma}$, jos ja vain jos $B \in \mathbf{\Sigma}$.*

9.2 Kanoniset mallit ja systeemin K täydellisyystulos

Olkoon $\mathbf{\Sigma}$ normaali modaalilogiikka ja A kaava. Merkitään

$$|A|_\Sigma = \{\, \Gamma \in \mathcal{M}_\Sigma \mid A \in \Gamma \,\}.$$

Joukon $|A|_\Sigma$ alkioina ovat siis kaikki sellaiset maksimaalisesti Σ-ristiriidattomat kaavajoukot, joihin A kuuluu. Jos $w \in \mathcal{M}_\Sigma$, niin $A \in w \Leftrightarrow w \in |A|_\Sigma$.

Määrittelemme seuraavaksi systeemin $\mathbf{\Sigma}$ *kanonisen kehyksen* $F_\Sigma = \langle \mathcal{M}_\Sigma, R_\Sigma \rangle$. Kanonisen kehyksen mahdollisten maailmojen joukko on kaikkien maksimaalisesti Σ-ristiriidattomien kaavajoukkojen joukko ja relaatio $R_\Sigma \subseteq \mathcal{M}_\Sigma \times \mathcal{M}_\Sigma$ toteuttaa ehdon

$$wR_\Sigma w' \Leftrightarrow \{\, B \mid \Box B \in w \,\} \subseteq w'.$$

Kun kanoniseen kehykseen liitetään valuaatio P_Σ, $P_\Sigma(p_i) = |p_i|_\Sigma$, niin saamme systeemin $\mathbf{\Sigma}$ *kanonisen mallin* $M_\Sigma = \langle F_\Sigma, P_\Sigma \rangle$. Todistamme seuraavaksi induktiolla, että

$$M_\Sigma, w \vDash A \Leftrightarrow A \in w. \qquad (*)$$

Tästä ehdosta seuraa, että $M_\Sigma \vDash A$, jos ja vain jos $\vdash_\Sigma A$. Induktiotodistuksen modaalioperaattoria $\Box$ vastaavassa askeleessa tarvitsemme seuraavaa aputulosta.

Lause 47. *Olkoon Ω sellainen Σ-ristiriidaton kaavajoukko, että $\neg\Box B \in \Omega$. Tällöin kaavajoukko $\{\, C \mid \Box C \in \Omega\} \cup \{\neg B \,\}$ on Σ-ristiriidaton.*

Todistus. Teemme vastaoletuksen, että $\{ C \mid \Box C \in \Omega \} \cup \{\neg B\}$ on Σ-ristiriitainen. Tällöin on olemassa sellaiset kaavat $C_1, C_2, \ldots, C_k \in \{ C \mid \Box C \in \Omega \}$, että

$$\vdash_\Sigma \neg(C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k \wedge \neg B).$$

(Huomaa, että jos $\vdash_\Sigma \neg(C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k)$, niin myös $\vdash_\Sigma \neg(C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k \wedge \neg B)$.) Tällöin lauselogiikan perusteella

$$\vdash_\Sigma C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k \to B.$$

Säännön (RR) yleistyksen (RR_k) perusteella (harjoitustehtävä)

$$\vdash_\Sigma \Box C_1 \wedge \Box C_2 \wedge \cdots \wedge \Box C_k \to \Box B,$$

joten lauselogiikan perusteella

$$\vdash_\Sigma \neg(\Box C_1 \wedge \Box C_2 \wedge \cdots \wedge \Box C_k \wedge \neg\Box B).$$

Mutta $\Box C_1, \Box C_2, \ldots, \Box C_k, \neg\Box B \in \Omega$, joten myös Ω olisi Σ-ristiriitainen. Vastaoletus on siis väärä ja olemme todistaneet, että kaavajoukko $\{ C \mid \Box C \in \Omega \} \cup \{\neg B\}$ on Σ-ristiriidaton. $\Box$

Voimme nyt todistaa ehdon $(*)$ voimassaolon.

Lause 48. *Olkoon M_Σ normaalin modaalilogiikan $\mathbf{\Sigma}$ kanoninen malli $\langle \mathcal{M}_\Sigma, R_\Sigma, P_\Sigma \rangle$. Tällöin jokaiselle kaavalle A pätee, että*

$$\forall w \in \mathcal{M}_\Sigma \colon M_\Sigma, w \vDash A \Leftrightarrow A \in w.$$

Todistus. Olkoon $A = p_i$. Nyt $M_\Sigma, w \vDash p_i$, jos ja vain jos $w \in P_\Sigma(p_i) = |p_i|_\Sigma$ eli jos ja vain jos $p_i \in w$.

Teemme induktio-oletuksen, että $M_\Sigma, w \vDash B \Leftrightarrow B \in w$ ja $M_\Sigma, w \vDash C \Leftrightarrow C \in w$ kaikille $w \in \mathcal{M}_\Sigma$. Olkoon $A = \neg B$. Tällöin induktio-oletuksen ja lauseen 43 kohdan (1) perusteella

$$\begin{aligned} M_\Sigma, w \vDash \neg B \quad &\Leftrightarrow M_\Sigma, w \nvDash B \\ &\Leftrightarrow B \notin w \\ &\Leftrightarrow \neg B \in w. \end{aligned}$$

Tarkastelemme sitten tapausta $A = B \wedge C$. Tällöin induktio-oletuksen ja lauseen 43 kohdan (2) perusteella

$$\begin{aligned} M_\Sigma, w \vDash B \wedge C \quad &\Leftrightarrow M_\Sigma, w \vDash B \text{ ja } M_\Sigma, w \vDash C \\ &\Leftrightarrow B \in w \text{ ja } C \in w \\ &\Leftrightarrow B \wedge C \in w. \end{aligned}$$

Tarkastelemme lopuksi tapausta $A = \Box B$. Oletamme ensin, että $\Box B \in w$. Relaation R_Σ määritelmän perusteella $B \in w'$ aina, kun $wR_\Sigma w'$. Induktio-oletuksen perusteella siis $M_\Sigma, w' \vDash B$ aina, kun $wR_\Sigma w'$. Siis $M_\Sigma, w \vDash \Box B$. Oletamme sitten, että $\Box B \notin w$. Koska $w \in \mathcal{M}_\Sigma$, niin tällöin $\neg\Box B \in w$. Aputuloksen 47 perusteella kaavajoukko $\{ C \mid \Box C \in w \} \cup \{\neg B\}$ on Σ-ristiriidaton. Lindenbaumin lemman perusteella on olemassa sellainen maksimaalisesti Σ-ristiriidaton kaavajoukko w', että $\{ C \mid \Box C \in w \} \cup \{\neg B\} \subseteq w'$. Relaation R_Σ määritelmän perusteella $wR_\Sigma w'$. Koska $\neg B \in w'$, niin $B \notin w'$, jolloin induktio-oletuksen perusteella $M_\Sigma, w' \nvDash B$. Täten $M_\Sigma, w \nvDash \Box B$. Näin olemme todistaneet, että $M_\Sigma, w \vDash \Box B \Leftrightarrow \Box B \in w$. $\Box$

Koska ehdon $(*)$ ja lauseen 45 perusteella

$$\begin{aligned} M_\Sigma \vDash A \quad &\Leftrightarrow \forall w \in \mathcal{M}_\Sigma \colon M_\Sigma, w \vDash A \\ &\Leftrightarrow \forall w \in \mathcal{M}_\Sigma \colon A \in w \\ &\Leftrightarrow A \in \textstyle\bigcap_{w \in \mathcal{M}_\Sigma} w \\ &\Leftrightarrow A \in \mathbf{\Sigma} \\ &\Leftrightarrow \vdash_\Sigma A, \end{aligned}$$

niin olemme todistaneet seuraavan lauseen.

Lause 49. *Olkoon M_Σ normaalin modaalilogiikan $\mathbf{\Sigma}$ kanoninen malli. Tällöin $Th(M_\Sigma) = \mathbf{\Sigma}$.*

Voimme nyt todistaa täydellisyystuloksen pienimmälle normaalille modaalilogiikalle **K**. Koska tämän systeemin teoreemat ovat valideja jokaisessa Kripke-kehyksessä, niin lauseen 42 (s. 71) oletukset ovat triviaalisti voimassa ja saamme seuraavan lauseen.

Lause 50. *Kaikkien Kripke-kehysten luokka determinoi systeemin* **K** *eli pienimmän normaalin modaalilogiikan.*

Esitämme tämänkaltaiset täydellisyystodistukset tiettyjen kehysten luokille, mutta tulokset pätevät tietenkin myös vastaavanlaisten mallien luokalle.

9.3 Erityisiä täydellisyystuloksia

Sovellamme seuraavaksi lausetta 42 jo tuttujen systeemien täydellisyystodistuksiin. Pyrimme siis todistamaan, että tietty normaali modaalilogiikka $\mathbf{\Sigma}$ on täydellinen suhteessa sellaisten kehysten luokkaan, joissa vaihtoehtorelaatiolla on tietty ominaisuus $\mathcal{O}$ (joka useimmiten on useamman "perusominaisuuden" yhdistelmä). Kun on todistettu systeemin $\mathbf{\Sigma}$ olevan luotettava tällaisen luokan suhteen, niin lauseen 42 perusteella riittää osoittaa, että kanonisessa kehyksessä $F_\Sigma = \langle \mathcal{M}_\Sigma, R_\Sigma \rangle$ vaihtoehtorelaatiolla R_Σ on ominaisuus $\mathcal{O}$.

Merkitköön "r" refleksiivisyyttä, "s" symmetrisyyttä ja "t" transitiivisuutta. Käytämme näitä alaindeksejä kehysten, joilla on nämä ominaisuudet, luokalle. Siis esimerkiksi $\mathcal{C}_r$ on kaikkien refleksiivisten eli T-kehysten luokka, $\mathcal{C}_{rt}$ on kaikkien $S4$-kehysten luokka ja $\mathcal{C}_{rst}$ on kaikkien $S5$-kehysten luokka.

Korrespondenssitulosten (ja itse asiassa jo oppikirjan ensimmäisen osan perusteella) saamme seuraavat luotettavuustulokset.

Lause 51. *Seuraavassa taulukossa on ensimmäisessä sarakkeessa systeemi ja toisessa sarakkeessa luokka, jonka suhteen systeemi on luotettava:*

systeemi	*luokka*
KT	$\mathcal{C}_r$
KB	$\mathcal{C}_s$
K4	$\mathcal{C}_t$
KTB	$\mathcal{C}_{rs}$
KT4	$\mathcal{C}_{rt}$
KB4	$\mathcal{C}_{st}$
KTB4	$\mathcal{C}_{rst}$.

Täydellisyyden todistamiseksi riittää siis todistaa, että näiden systeemien kanoniset kehykset kuuluvat vastaaviin luokkiin. Tarkastelemme ensin refleksiivisyyden osalta systeemin **KT** sisältävien systeemien $\mathbf{\Sigma}$ kanonisia kehyksiä $F_\Sigma = \langle \mathcal{M}_\Sigma, R_\Sigma \rangle$. Systeemi $\mathbf{\Sigma}$ voi olla esimerkiksi **KT**, **KTB** tai **KTB4**; oleellista on, että systeemi $\mathbf{\Sigma}$ sisältää kaikki skeeman (T) instanssit. Olkoon $w \in \mathcal{M}_\Sigma$. Teoreemaskeeman (T) perusteella jokaiselle kaavalle A pätee, että $\Box A \to A \in w$. Koska w on maksimaalisesti ristiriidaton kaavajoukko, niin täten on voimassa implikaatio $\Box A \in w \Rightarrow A \in w$ (harjoitustehtävä). Tämän perusteella $\{ A \mid \Box A \in w \} \subseteq w$, joten relaation R_Σ määritelmän perusteella $wR_\Sigma w$. Relaatio R_Σ on siis refleksiivinen ja $F_\Sigma \in \mathcal{C}_r$.

Tarkastelemme seuraavaksi symmetrisyyttä. Olkoon $\mathbf{\Sigma}$ sellainen systeemi, jonka teoreemaskeemana on (B). Todistamme, että kanonisen kehyksen F_Σ relaatio R_Σ on symmetrinen. Oletamme ensin, että $w_1, w_2 \in \mathcal{M}_\Sigma$ ja $w_1 R_\Sigma w_2$ eli että $\{ A \mid \Box A \in w_1 \} \subseteq w_2$. Sitten osoitamme, että $w_2 R_\Sigma w_1$ eli että $\{ A \mid \Box A \in w_2 \} \subseteq w_1$. Teemme vastaoletuksen, että on olemassa sellainen kaava A, että $\Box A \in w_2$, mutta $A \notin w_1$. Tällöin $\neg A \in w_1$ ja koska teoreemaskeeman (B) perusteella $\neg A \to \Box\Diamond\neg A \in w_1$, niin $\Box\Diamond\neg A \in w_1$. Tällöin relaation R_Σ määritelmän perusteella $\Diamond\neg A \in w_2$. Koska $\vdash_K \Diamond\neg A \leftrightarrow \neg\Box A$, niin täten $\neg\Box A \in w_2$. Mutta tämä on ristiriidassa oletuksen $\Box A \in w_2$ kanssa, joten vastaoletus on siis väärä. Täten $w_2 R_\Sigma w_1$ ja olemme todistaneet relaation R_Σ olevan symmetrinen.

Lopuksi tarkastelemme transitiivisuutta. Olkoon $\mathbf{\Sigma}$ sellainen systeemi, jonka teoreemaskeemana on (4). Oletamme, että kanonisen kehyksen maailmoille w_1, w_2 ja w_3 pätee, että $w_1 R_\Sigma w_2$ ja $w_2 R_\Sigma w_3$. Tämä on siis yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\{ A \mid \Box A \in w_1 \} \subseteq w_2 \tag{3}$$

ja

$$\{ A \mid \Box A \in w_2 \} \subseteq w_3. \tag{4}$$

Olkoon A sellainen kaava, että $\Box A \in w_1$. Teoreemaskeeman (4) perusteella $\Box A \to \Box\Box A \in w_1$, joten myös $\Box\Box A \in w_1$. Ehdon (3) perusteella tällöin $\Box A \in w_2$, jolloin ehdon (4) perusteella $A \in w_3$. Olemme näin osoittaneet, että $\{ A \mid \Box A \in w_1 \} \subseteq w_3$ eli että $w_1 R_\Sigma w_3$. Kun siis skeema (4) on systeemin $\mathbf{\Sigma}$ teoreemaskeema, niin kanonisen kehyksen vaihtoehtorelaatio R_Σ on transitiivinen.

Yhteenvetona edellä olevista tarkasteluista saamme seuraavan lauseen.

Lause 52. *Olkoon $\mathbf{\Sigma}$ normaali modaalilogiikka ja $F_\Sigma = \langle \mathcal{M}_\Sigma, R_\Sigma \rangle$ sen kanoninen kehys.*

1. *Jos skeema (T) on systeemin $\mathbf{\Sigma}$ teoreemaskeema, niin R_Σ on refleksiivinen.*
2. *Jos skeema (B) on systeemin $\mathbf{\Sigma}$ teoreemaskeema, niin R_Σ on symmetrinen.*
3. *Jos skeema (4) on systeemin $\mathbf{\Sigma}$ teoreemaskeema, niin R_Σ on transitiivinen.*

Täten saamme lauseen 51 luotettavuustuloksia vastaavat täydellisyystulokset:

Lause 53. *Olkoot $\mathcal{C}_r$, $\mathcal{C}_s$ jne. samoja kehysten luokkia kuin lauseessa 51. Tällöin*

$$\begin{aligned}
Th(\mathcal{C}_r) &= \mathbf{KT}, \\
Th(\mathcal{C}_s) &= \mathbf{KB}, \\
Th(\mathcal{C}_t) &= \mathbf{K4}, \\
Th(\mathcal{C}_{rs}) &= \mathbf{KTB}, \\
Th(\mathcal{C}_{rt}) &= \mathbf{KT4}, \\
Th(\mathcal{C}_{st}) &= \mathbf{KB4}, \\
Th(\mathcal{C}_{rst}) &= \mathbf{KTB4}.
\end{aligned}$$

Erityisesti siis systeemi **T** on luotettava ja täydellinen kaikkien refleksiivisten kehysten eli T-kehysten luokan suhteen, systeemi **S4** kaikkien refleksiivisten ja transitiivisten eli $S4$-kehysten luokan suhteen ja systeemi **S5** kaikkien sellaisten kehysten, joissa vaihtoehtorelaatio on ekvivalenssirelaatio, eli $S5$-kehysten luokan suhteen.

Vastaavaan tapaan voidaan esittää luotettavuus- ja täydellisyystulokset kaikille *kanonisille* normaaleille modaalilogiikoille $\mathbf{KS_1} \ldots \mathbf{S_n}$, kunhan vain löydetään skeemoja S_1, S_2, $\ldots$, S_n vastaavat vaihtoehtorelaation ominaisuudet.

9.4 L- ja $S5$-mallien vastaavuus

On mahdollista todistaa systeemin **S5** täydellisyys myös L-mallien luokan suhteen. Emme kuitenkaan esitä tätä todistusta, vaan osoitamme suoraan, että kaikkien L-mallien luokka ja kaikkien $S5$-mallien luokka determinoivat saman systeemin.

Olkoon $M_L = \langle W, P\rangle$ L-malli ja $M_K = \langle W, R, P\rangle$ Kripke-malli, jossa relaatio R on universaalinen relaatio $W \times W$. Kripke-malli M_K on $S5$-malli, koska universaalinen relaatio on ekvivalenssirelaatio.

Kummassakin mallissa esiintyy sama valuaatiofunktio P, joten kun $w \in W$ ja p on lausemuuttuja, niin

$$M_L, w \vDash p \Leftrightarrow M_K, w \vDash p.$$

Helposti voimme induktiolla kaavan A pituuden suhteen todistaa (harjoitustehtävä), että yleisestikin

$$\forall w \in W\colon M_L, w \vDash A \Leftrightarrow M_K, w \vDash A.$$

Tästä seuraa, että $Th(M_L) = Th(M_K)$.

Jos jokin kaava A on validi jokaisessa $S5$-mallissa, se on validi myös jokaisessa sellaisessa Kripke-mallissa $\langle W, R, P\rangle$, jossa $R = W \times W$. Koska jokaista L-mallia vastaa tällainen Kripke-malli, niin yllä olevan huomion perusteella kaava A on validi myös jokaisessa L-mallissa.

Oletamme sitten kääntäen, että kaava A on validi jokaisessa L-mallissa. Tehdään vastaoletus, että kaava A ei ole validi jossakin $S5$-mallissa $M = \langle W, R, P\rangle$. Tällöin siis $\exists w \in W\colon M, w \nvDash A$. Olkoon $M(w) = \langle W(w), R^*, P^*\rangle$ maailman w generoima mallin M alimalli (määritelmästä ks. s. 68). Induktiolla voimme todistaa (harjoitustehtävä), että jokaiselle kaavalle B pätee

$$\forall w' \in W(w)\colon M, w' \vDash B \Leftrightarrow M(w), w' \vDash B.$$

Siis $M(w), w \nvDash A$. Mutta R^* on universaalinen relaatio $W(w) \times W(w)$ (harjoitustehtävä), joten myös L-mallissa $\langle W(w), P^*\rangle \nvDash A$. Vastoin oletusta kaava A ei siis olisikaan validi jokaisessa L-mallissa. Voimme siis päätellä, että L-validit kaavat ovat myös $S5$-valideja.

Olemme näin osoittaneet kaikkien L-mallien luokan ja kaikkien $S5$-mallien luokan määräävän saman systeemin. Koska olemme todistaneet kaikkien $S5$-mallien luokan määräävän systeemin **S5**, saamme seuraavan tuloksen.

Lause 54. *Normaali modaalilogiikka* **S5** *on luotettava ja täydellinen kaikkien L-mallien luokan suhteen.*

10 Äärelliset kehykset

Olemme edellä esittäneet seuraavanlaisia tuloksia: kun $\mathcal{C}$ on sellaisten kehysten (tai mallien) luokka, joissa vaihtoehtorelaatiolla on "sopiva", systeemiä $\mathbf{\Sigma}$ vastaava ominaisuus $\mathcal{O}_\Sigma$, niin $Th(\mathcal{C}) = \mathbf{\Sigma}$. Tässä luvussa tarkastelemme sitä, milloin jokin äärellisten kehysten osaluokka determinoi systeemin $\mathbf{\Sigma}$. Sanomme, että

> systeemillä $\mathbf{\Sigma}$ on *äärellisen kehyksen ominaisuus*, jos aina, kun $A \notin \mathbf{\Sigma}$, on olemassa sellainen äärellinen Kripke-kehys F systeemille $\mathbf{\Sigma}$, että $F \not\models A$.

Voimme määritellä myös äärellisen mallin ominaisuuden: systeemillä $\mathbf{\Sigma}$ on *äärellisen mallin ominaisuus*, jos aina, kun $A \notin \mathbf{\Sigma}$, niin on olemassa sellainen äärellinen malli M, että $M \models \mathbf{\Sigma}$ ja $M \not\models A$. Jos systeemillä $\mathbf{\Sigma}$ on äärellisen kehyksen ominaisuus, sillä on triviaalisti myös äärellisen mallin ominaisuus (harjoitustehtävä). Voidaan todistaa, että käänteinenkin väite on voimassa [25, s. 150–152], joten äärellisen kehyksen ja äärellisen mallin ominaisuudet merkitsevät samaa.

Oletetaan, että systeemillä $\mathbf{\Sigma}$ on äärellisen kehyksen ominaisuus. Aina, kun A ei ole systeemin $\mathbf{\Sigma}$ teoreema, on siis olemassa sellainen äärellinen kehys $F \models \mathbf{\Sigma}$, että $F \not\models A$. Valitaan jokaista kaavaa $A \notin \mathbf{\Sigma}$ kohti yksi tällainen kehys ja käytetään sille merkintää F_A. Helposti nähdään, että $Th(\{\, F_A \mid A \notin \mathbf{\Sigma} \,\}) = \mathbf{\Sigma}$ (harjoitustehtävä). Seuraava lause on siis voimassa.

Lause 55. *Jos systeemillä $\mathbf{\Sigma}$ on äärellisen kehyksen ominaisuus, on olemassa äärellisten kehysten luokka, joka determinoi sen.*

Tämän lauseen seurauksena saamme, että jos systeemillä $\mathbf{\Sigma}$ on äärellisen kehyksen (tai yhtäpitävästi äärellisen mallin) ominaisuus ja $\langle W, R\rangle \models \mathbf{\Sigma}$, jos ja vain jos vaihtoehtorelaatiolla R on ominaisuus $\mathcal{O}_\Sigma$, niin kaikkien äärellisten kehysten (mallien), joissa vaihtoehtorelaatiolla on ominaisuus $\mathcal{O}_\Sigma$, luokka determinoi systeemin $\mathbf{\Sigma}$.

Systeemin $\mathbf{\Sigma}$ sanotaan olevan *ratkeava*, jos on olemassa menettelytapa, jolla jokaisen kaavan A kohdalla voidaan ratkaista (ainakin periaatteessa) kysymys siitä, onko kaava A systeemin $\mathbf{\Sigma}$ teoreema vai ei (ratkeavuuden määritelmästä ja alempana esitettävistä tuloksista ks. [25, s. 152–154]). Kun systeemi $\mathbf{\Sigma}$ on aksiomatisoitu lisäämällä systeemin $\mathbf{K}$ aksiomatisointiin äärellinen määrä aksioomaskeemoja, voidaan osoittaa, että sen kaikki teoreemat ovat (periaatteessa) lueteltavissa ja tämän teoreemien listauksen pohjalta voidaan antaa aina myönteinen vastaus niissä tapauksissa, joissa A on systeemin $\mathbf{\Sigma}$ teoreema. Jos systeemillä $\mathbf{\Sigma}$ on äärellisen kehyksen ominaisuus, niin voidaan osoittaa, että on mahdollista luetella kaikki systeemin $\mathbf{\Sigma}$ äärelliset kehykset ja niihin liittyvät mallit, joissa annettu kaava A ei mahdollisesti ole validi. Tämän "mahdollisten vastamallien" listauksen pohjalta voidaan antaa aina kielteinen vastaus niissä tapauksissa, joissa A ei ole systeemin $\mathbf{\Sigma}$ teoreema. Systeemi $\mathbf{\Sigma}$ on siis ratkeava, jos sillä on äärellisen kehyksen ominaisuus. Osoitamme tässä luvussa, että systeemeillä $\mathbf{K}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{S4}$ ja $\mathbf{S5}$ on äärellisen kehyksen ominaisuus, joten ne kaikki ovat ratkeavia.

Kanonisen kehyksen mahdollisten maailmojen joukko $\mathcal{M}_\Sigma$ on aina ääretön (harjoitustehtävä), joten emme voi käyttää sitä suoraan hyväksi todistaessamme äärellisten kehysten luokille täydellisyystuloksia. Esittelemme seuraavassa alaluvussa tekniikan, jolla pyritään muodostamaan annettua ääretöntä mallia ominaisuuksiltaan mahdollisimman paljon vastaava äärellinen malli.

10.1 Filtraatio

Tarkastelemme ensin esimerkkinä pienintä normaalia modaalilogiikkaa **K**. Jos $A \notin \mathbf{K}$, niin täydellisyystuloksen perusteella on olemassa sellainen ääretön Kripke-malli (esimerkiksi systeemin **K** kanoninen malli) $M = \langle W, R, P \rangle$, että $M \not\models A$. Olkoon $subA$ kaikkien kaavan A alikaavojen joukko. Määrittelemme joukossa W relaation $\sim$ seuraavasti:

$$w_1 \sim w_2, \text{ jos ja vain jos } \forall B \in subA\colon M, w_1 \models B \Leftrightarrow M, w_2 \models B.$$

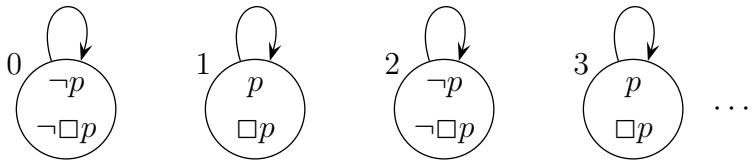
Relaatio $\sim$ riippuu siis sekä mallista M että kaavasta A (sen alikaavojen joukosta), joten tarvittaessa voimme käyttää sille merkintää $\sim^M_{subA}$.

Relaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio (harjoitustehtävä), joten voimme muodostaa kaikkien sen määräämien ekvivalenssiluokkien joukon $W^* = \{\, [w] \mid w \in W \,\}$.[11] Valitsemme tämän joukon mallin M^* mahdollisten maailmojen joukoksi ja määrittelemme vaihtoehtorelaation R^f seuraavasti:

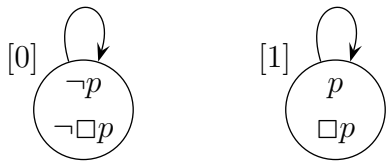
$$[w_1]R^f[w_2] \Leftrightarrow \exists w_1', w_2'\colon w_1' \in [w_1],\ w_2' \in [w_2] \text{ ja } w_1' R w_2'.$$

Merkitsemme $[P(p_i)] = \{\, [w] \mid w \in P(p_i) \,\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ ja määrittelemme valuaation P^* ehdon $P^*(p_i) = [P(p_i)]$ mukaisesti. Mallia $M^* = \langle W^*, R^f, P^* \rangle$ kutsumme mallin M *filtraatioksi.*

Esimerkki 47. Olkoon $A = \Box p$, jolloin $subA = \{p, \Box p\}$. Tarkastellaan mallia $M = \langle W, R, P \rangle$, jossa $W = \mathbb{N}$, $R = \{\, \langle n, n \rangle \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ ja $P(p) = \{1, 3, 5, \ldots\}$. Tällöin siis ehdot $M, n \models p$, $M, n \models \Box p$ ja "n on pariton" ovat yhtäpitäviä.



Ekvivalenssiluokkia on vain kaksi, $[0] = [2n]$ ja $[1] = [2n+1]$ $(n \in \mathbb{N})$, joten mallissa $\langle W^*, R^f, P^* \rangle$ joukko $W^* = \{[0], [1]\}$ on äärellinen, vaikka joukko W on ääretön. Koska $0R0$ ja $1R1$, niin $[0]R^f[0]$ ja $[1]R^f[1]$. Seuraava kuvio esittää filtraatiota $M^* = \langle W^*, R^f, P^* \rangle$:



Nyt $P^*(p) = \{[1]\}$. Yleisemmin, jos $P(q)$ sisältää vain parillisia lukuja, niin $P^*(q) = \{[0]\}$, jos vain parittomia, niin $P^*(q) = \{[1]\}$, ja jos se sisältää sekä parittomia että parillisia lukuja, niin $P^*(q) = \{[0], [1]\} = W^*$.

Yllä olevan esimerkin malli M oli ääretön, mutta filtraatio M^* äärellinen. Todistamme seuraavaksi, että filtraatio $M^* = \langle W^*, R^f, P^* \rangle$ on aina äärellinen. Kaavan A alikaavojen

[11] Täsmällisesti merkiten $[w]$ on siis $w/{\sim^M_{subA}}$ eli alkion w määräämä ekvivalenssiluokka $\{\, w' \mid w \sim^M_{subA} w' \,\}$ relaatiossa $\sim^M_{subA}$.

joukko on aina äärellinen, olkoon se järjestettynä $\langle B_1, B_2, \ldots, B_n\rangle$, jossa siis jokin $B_i = A$. Määritellään bittijono $A(w) = \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\rangle$ seuraavasti:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & M, w \vDash B_i, \\ 0, & M, w \nvDash B_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Jos $A(w) = A(w')$ ja $B \in subA$, niin $M, w \vDash B$, jos ja vain jos $M, w' \vDash B$, ja täten $[w] = [w']$. Jokaista ekvivalenssiluokkaa $[w]$ vastaa täsmälleen yksi bittijono $A(w) = \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\rangle$ (harjoitustehtävä: osita,e ttä käänteinen väite ei yleensä ole voimassa). Koska näitä bittijonoja on korkeintaan 2^n, niin joukko W^* on äärellinen.

Malli M^* on siis äärellinen. Osoitamme seuraavaksi, että kaava A ei ole validi siinä. Valuaation P^* ja relaation $\sim$ määritelmien perusteella (harjoitustehtävä)

$$\forall w \in W\colon \forall p_i \in subA\colon M^*, [w] \vDash p_i \Leftrightarrow M, w \vDash p_i.$$

Teemme induktio-oletuksen, että

$$\forall w \in W\colon \forall B \in subA\colon M^*, [w] \vDash B \Leftrightarrow M, w \vDash B$$

ja

$$\forall w \in W\colon \forall C \in subA\colon M^*, [w] \vDash C \Leftrightarrow M, w \vDash C.$$

Jätämme harjoitustehtäväksi todistaa, että induktio-oletuksen perusteella

$$\forall w \in W\colon \forall \neg B \in subA\colon M^*, [w] \vDash \neg B \Leftrightarrow M, w \vDash \neg B$$

ja

$$\forall w \in W\colon \forall B \wedge C \in subA\colon M^*, [w] \vDash B \wedge C \Leftrightarrow M, w \vDash B \wedge C.$$

Tarkastelemme tässä induktioaskelta $\Box B \in subA$. Kun $\Box B \in subA$, niin myös $B \in subA$, joten voimme soveltaa induktio-oletusta. Oletamme ensin, että $M^*, [w_1] \vDash \Box B$. Tehtävämme on todistaa, että $M, w_1 \vDash \Box B$. Olkoon siis $w \in W$ sellainen maailma, että $w_1 R w$. Relaation R^f määritelmän perusteella $[w_1] R^f [w]$. Jos nyt olisi $M, w \nvDash B$, niin induktio-oletuksen perusteella $M^*, [w] \nvDash B$, joka on ristiriidassa oletuksemme $M^*, [w_1] \vDash \Box B$ kanssa.

Oletamme sitten, että $M, w_1 \vDash \Box B$. Tällöin siis $M, w \vDash B$ aina, kun $w_1 R w$. Olkoon $[w] \in W^*$ sellainen maailma, että $[w_1] R^f [w]$. Tällöin siis on olemassa sellaiset $w_1' \in [w_1]$ ja $w' \in [w]$, että $w_1' R w'$. Koska $w_1' \sim w_1$, niin $M, w_1' \vDash \Box B$. Siis $M, w' \vDash B$, jolloin induktio-oletuksen perusteella $M^*, [w'] \vDash B$. Koska $[w'] = [w]$, niin myös $M^*, [w] \vDash B$. Täten $M^*, [w_1] \vDash \Box B$.

Induktioperiaatteen mukaisesti saamme, että

$$M^*, [w] \vDash D \Leftrightarrow M, w \vDash D \text{ aina, kun } D \in subA \text{ ja } w \in W.$$

Koska oletuksemme mukaan $M \nvDash A$, niin on olemassa sellainen $w \in W$, että $M, w \nvDash A$. Kaava A itse kuuluu alikaavojensa joukkoon, joten tällöin $M^*, [w] \nvDash A$. Olemme näin todistaneet, että jos $A \notin \mathbf{K}$, on olemassa äärellinen kehys $\langle W^*, R^f\rangle$, jossa A ei ole validi. Pienimmällä modaalilogiikalla $\mathbf{K}$ on siis äärellisen kehyksen (ja mallin) ominaisuus.

Havainnollistamme vielä tätä tulosta ja filtraation $M^* = \langle W^*, R^f, P^*\rangle$ konstruoimista seuraavalla esimerkillä.

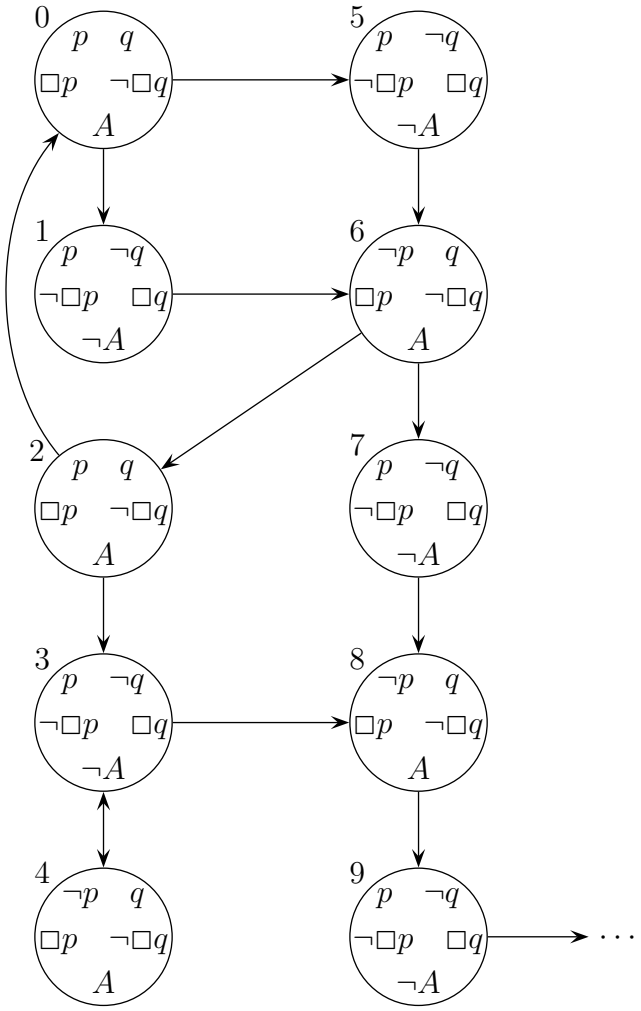
Esimerkki 48. Olkoon $A = \Box q \to \Box p$, jolloin $subA = \{p, q, \Box p, \Box q, \Box q \to \Box p\}$. Tarkastellaan mallia $M = \langle W, R, P\rangle$, jossa $W = \mathbb{N}$,

$$R = \{\langle 0,1\rangle, \langle 0,5\rangle, \langle 1,6\rangle, \langle 2,0\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 3,8\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 6,2\rangle\} \cup \{\, \langle m, m+1\rangle \mid m = 5,6,7,\ldots\},$$

$P(p) = \{0,2\} \cup \{1,3,5,\ldots\}$ ja $P(q) = \{0,2,4,\ldots\}$. Malli M on rakenteeltaan melko monimutkainen, mutta kun piirrämme kuvion (kuvio 2), jossa rajoitumme tutkimaan lauseita $B \in subA$, niin huomaamme, että on kolmenlaisia maailmoja:

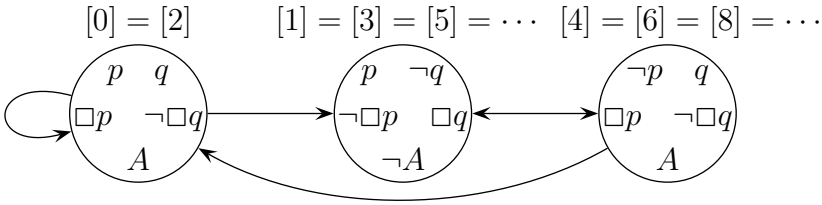
- maailmat 0 ja 2 (lauseet p, q, $\Box p$, $\neg\Box q$ ja A tosia)
- maailmat 1, 3, 5, ... (lauseet p, $\neg q$, $\neg\Box p$, $\Box q$ ja $\neg A$ tosia)
- maailmat 4, 6, 8, ... (lauseet $\neg p$, q, $\Box p$, $\neg\Box q$ ja A tosia).

Saamme siis ekvivalenssiluokat $[0] = [2]$, $[1] = [3] = [5] = \cdots$ ja $[4] = [6] = [8] = \cdots$. Filtraatiossa $M^* = \langle W^*, R^f, P^*\rangle$ on siis $W^* = \{[0], [1], [4]\}$, $P^*(p) = \{[0], [1]\}$ ja $P^*(q) =$



Kuvio 2: Esimerkin 48 malli M.

$\{[0], [4]\}$. Sen perusteella, että $2R0$, $0R1$, $1R6$, $6R7$ ja $6R2$ saamme $[0]R^f[0]$, $[0]R^f[1]$, $[1]R^f[4]$, $[4]R^f[1]$ ja $[4]R^f[0]$. Malli M^* on siis varsin yksinkertainen:



Edellä esitetty todistus systeemin **K** äärellisen kehyksen ominaisuudelle oli sikäli helppo, että tiedämme kaikkien tämän systeemin teoreemojen olevan valideja jokaisessa Kripke-kehyksessä, eikä meidän täten tarvinnut erikseen tutkia sitä, onko kehys $\langle W^*, R^f \rangle$ todella kehys systeemille **K**. Tutkiessamme samaan tapaan kysymystä systeemin **T** äärellisen kehyksen ominaisuudesta voimme ottaa lähtökohdaksi sen, että jos A ei ole systeemin **T** teoreema, niin täydellisyystuloksen perusteella on olemassa sellainen refleksiivinen kehys ja siihen liittyvä malli M, jossa kaava A ei ole validi. Sen varmistamiseksi, että filtraation M^* kehysosa on kehys systeemille **T**, meidän täytyy osoittaa, että sen vaihtoehtorelaatio R^f on refleksiivinen. Mutta tämän relaation refleksiivisyys seuraa helposti relaation R refleksiivisyydestä: koska wRw ja $w \in [w]$, niin $[w]R^f[w]$ aina, kun $[w] \in W^*$. Jos nyt yleisesti vaihtoehtorelaation ominaisuus $\mathcal{O}$ on sellainen, että se säilyy konstruoitaessa relaatio R^f, niin systeemillä $Th(\{ \langle W, R \rangle \mid \mathcal{O}(R) \})$ on äärellisen kehyksen ominaisuus. Refleksiivisyyden lisäksi mm. symmetrisyys on tällainen ominaisuus. Jos nimittäin $[w]R^f[w']$, niin olemassa sellaiset mallin M maailmat, että $w_1 \sim w$, $w_1' \sim w'$ ja $w_1 R w_1'$. Jos R on symmetrinen, niin $w_1' R w_1$ ja täten myös $[w']R^f[w]$.

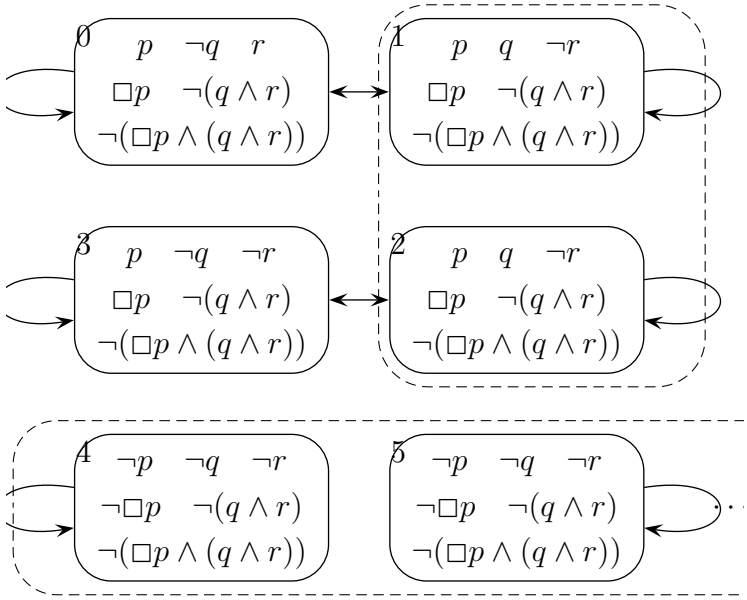
Koska siis mallin $\langle W, R, P \rangle$ filtraatio $\langle W^*, R^f, P^* \rangle$ on refleksiivinen, jos R on refleksiivinen, ja symmetrinen, jos R on symmetrinen, saamme seuraavan lauseen.

Lause 56. *Systeemeillä* **K**, **T** = **KT**, **KB** *ja* **KTB** *on äärellisen kehyksen ominaisuus.*

Seuraavassa esimerkissä osoitamme, että vaikka R on transitiivinen, niin R^f ei välttämättä sitä ole.

Esimerkki 49. Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$, jossa $W = \mathbb{N}$,

$$R = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle\} \cup \{ \langle n,n\rangle \mid n \in \mathbb{N} \},$$
$$P(p) = \{0,1,2,3\},$$
$$P(q) = \{1,2\},$$
$$P(r) = \{0\}.$$

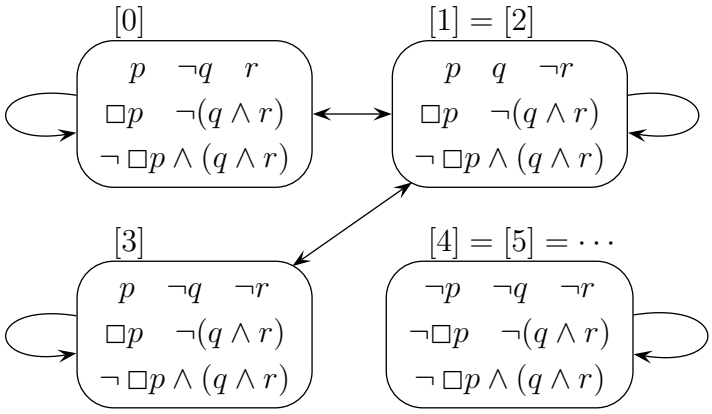


Tarkastellaan kaavaa $A = \Box p \wedge (q \wedge r)$. Esitetään sen alikaavojen joukko järjestettynä jonona $\langle A, \Box p, q \wedge r, p, q, r\rangle$. Tällöin (ks. määritelmä s. 81)

$$\begin{aligned}
A(0) &= \langle 0,1,0,1,0,1\rangle,\\
A(1) &= \langle 0,1,0,1,1,0\rangle,\\
A(2) &= \langle 0,1,0,1,1,0\rangle,\\
A(3) &= \langle 0,1,0,1,0,0\rangle,\\
A(n) &= \langle 0,0,0,0,0,0\rangle, \text{ kun } n \geq 4.
\end{aligned}$$

Koska $A(1) = A(2)$ ja $A(m) = A(n)$ $(m, n \geq 4)$, niin eri ekvivalenssiluokkia on neljä, nimittäin $[0]$, $[1] = [2]$, $[3]$ ja $[n]$ $(n \geq 4)$.

Relaatio R on transitiivinen. Koska $0R1$, $2R3$ ja $2 \in [1]$, niin $[0]R^f[1]$ ja $[1]R^f[3]$. Mutta koska $[0] = \{0\}$, $[3] = \{3\}$ ja $0 \not R 3$, niin $[0] \not R^f [3]$. Relaatio R^f ei ole siis transitiivinen.



Jos siis tarkastelemme systeemiä **K4** ja kaavaa $A \notin$ **K4**, niin edellä esitetyn perusteella pystymme kyllä löytämään sellaisen äärellisen mallin $M^* = \langle F^*, P^*\rangle$, jossa A ei ole validi, mutta koska se ei ole transitiivinen, niin F^* ei ole kehys systeemille **K4**, eikä M^* välttämättä ole malli systeemille **K4**. Jos haluamme siis todistaa, että systeemillä **K4** on äärellisen kehyksen ominaisuus, meidän pitää valita vaihtoehtorelaatioksi jokin muu relaatio kuin R^f. Kun tutkimme hieman tarkemmin esimerkkitodistustamme systeemin **K**

äärellisen mallin ominaisuudelle, huomaamme, että pystymme todistamaan induktioaskeleen

$$\forall w \in W : \forall \Box B \in subA : M^*, [w] \vDash \Box B \Leftrightarrow M, w \vDash \Box B,$$

kunhan mallin M^* vaihtoehtorelaatio R^* toteuttaa ehdot

$$\text{jos } w_1 R w, \text{ niin } [w_1] R^* [w] \tag{FF}$$

ja

$$\text{jos } [w_1] R^* [w],\ \Box B \in subA \text{ ja } M, w_1 \vDash \Box B, \text{ niin } M, w \vDash B. \tag{CF}$$

Relaatio R^f on vain yksi esimerkki nämä ehdot toteuttavasta vaihtoehtorelaatiosta (harjoitustehtävä). Annammekin seuraavaksi yleiset määritelmät ja tulokset filtraatioille. Emme todista näitä tuloksia, mutta lukijan, joka on perehtynyt systeemiä **K** koskevaan esimerkkiin, on kuitenkin helppo tehdä itse nämä todistukset. Näiden yleisten tulosten jälkeen voimme todistaa, että myös systeemeillä **K4** ja **S4** ja **S5** on äärellisen mallin ominaisuus.

Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$ Kripke-malli ja Γ alikaavojen suhteen suljettu kaavajoukko. Määrittelemme ekvivalenssirelaation $\sim_\Gamma^M$ seuraavasti:

$$w \sim_\Gamma^M w', \text{ jos ja vain jos } \forall B \in \Gamma : M, w \vDash B \Leftrightarrow M, w' \vDash B.$$

Määrittelemme, että

> mallin M Γ-*filtraatio* on sellainen malli $M^* = \langle W^*, R^*, P^* \rangle$, jossa $W^* = W/{\sim_\Gamma^M}$ (kaikkien relaation $\sim_\Gamma^M$ määräämien ekvivalenssiluokkien joukko), $P^*(p) = [P(p)]$ ja R^* toteuttaa edellä esitetyt ehdot (FF) ja (CF).

Vastaavasti kuin edellä systeemille **K** esitetyssä esimerkkitapauksessa voidaan todistaa seuraava lause.

Lause 57. *Jos $A \in \Gamma$ ja M^* on mallin M Γ-filtraatio, niin*

$$M, w \vDash A \Leftrightarrow M^*, [w] \vDash A$$

aina, kun w on mallin M maailma. Silloin kun Γ on äärellinen, niin myös M^* on äärellinen.

Kun M ja Γ (joka yleensä on jonkin kaavan kaikkien alikaavojen joukko) on kiinnitetty, filtraation M^* mahdollisten maailmojen joukko ja valuaatio määräytyvät tämän perusteella. Sen sijaan vaihtoehtorelaatio R^* voidaan valita yleensä useammalla tavalla ehtojen (FF) ja (CF) asettamissa rajoissa. Kutsumme filtraatiota $\langle W^*, R^f, P^* \rangle$ *pienimmäksi filtraatioksi*, sillä kun $\langle W^*, R^*, P^* \rangle$ on mallin M Γ-filtraatio, niin $R^f \subseteq R^*$. Saamme *suurimman* Γ-filtraation muuntamalla ehdon (CF) implikaation ekvivalenssiksi ja määrittelemällä

$$R^F = \{ \langle [w], [w'] \rangle \mid \forall \Box B \in \Gamma : M, w \vDash \Box B \Rightarrow M, w' \vDash B \}.$$

Relaation R^F voidaan todistaa toteuttavan myös ehdon (FF) (harjoitustehtävä), joten $\langle W^*, R^F, P^* \rangle$ on todella filtraatio. Sen vaihtoehtorelaatio R^F on isoin siinä mielessä, että jokaisen muun filtraation vaihtoehtorelaatio sisältyy siihen (harjoitustehtävä).

Ehdosta (FF) seuraa, että refleksiivisyys säilyy kaikissa filtraatioissa:

Lause 58. *Refleksiivisen mallin jokainen Γ-filtraatio on refleksiivinen.*

10.2 Transitiiviset filtraatiot

Seuraavassa lauseessa määrittelemme filtraation, joka säilyttää transitiivisuuden. Jätämme lauseen todistuksen harjoitustehtäväksi.

Lause 59. (Vrt. [9, s. 106] ja [25, s. 144].) *Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ transitiivinen Kripke-malli, Γ alikaavojen suhteen suljettu kaavajoukko ja*

$$R^{tf} = \{\, \langle [w], [w']\rangle \mid \\ \forall B \in \Gamma\colon M, w \vDash B \Rightarrow \big(M, w' \vDash B \text{ ja } M, w' \vDash \Box B\big)\,\}.$$

Tällöin $M^* = \langle W^*, R^{tf}, P^*\rangle$ on mallin M transitiivinen Γ-filtraatio.

Lauseiden 58 ja 59 perusteella saamme seuraavan lauseen.

Lause 60. *Systeemeillä* **K4** *ja* **S4** = **KT4** *on äärellisen kehyksen ominaisuus.*

Osoittaaksemme, että systeemillä **S5** = **KTB4** on äärellisen kehyksen ominaisuus, tarkastelemme ekvivalenssirelaation säilymistä filtraatiossa.

Lause 61. *Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ Kripke-malli, jossa R on ekvivalenssirelaatio, ja olkoon Γ alikaavojen suhteen suljettu kaavajoukko. Olkoon M^* malli $\langle W^*, R^{rstf}, P^*\rangle$, jossa $W^* = W/{\sim}^M_\Gamma$, $P^*(p) = [P(p)]$ ja*

$$R^{rstf} = \{\, \langle [w], [w']\rangle \mid \forall \Box B \in \Gamma\colon M, w \vDash \Box B \Leftrightarrow M, w' \vDash \Box B\,\}.$$

Tällöin M^* on sellainen mallin M Γ-filtraatio, jonka vaihtoehtorelaatio on ekvivalenssirelaatio.

Todistus. Todistamme ensin, että malli M^* on mallin M Γ-filtraatio. Oletamme, että wRw'. Koska R on ekvivalenssirelaatio, niin $\{\, w^* \mid wRw^*\,\} = \{\, w^* \mid w'Rw^*\,\}$ (harjoitustehtävä). Täten aina, kun $\Box B \in \Gamma$, niin $M, w \vDash \Box B$, jos ja vain jos $M, w' \vDash \Box B$, jolloin relaation R^{rstf} määritelmän perusteella $[w]R^{rstf}[w']$. Relaatio R^{rstf} toteuttaa siis ehdon (FF).

Oletamme sitten, että $[w]R^{rstf}[w']$, $\Box B \in \Gamma$ ja $M, w \vDash \Box B$. Relaation R^{rstf} määritelmän mukaan saamme, että $M, w' \vDash \Box B$. Koska R on refleksiivinen, niin $M, w' \vDash B$. Relaatio R^{rstf} toteuttaa siis ehdon (CF).

Seuraavaksi todistamme, että R^{rstf} on ekvivalenssirelaatio. Suoraan relaation R^{rstf} määritelmän perusteella saamme, että R^{rstf} on refleksiivinen ja symmetrinen. Oletamme, että $[w_1]R^{rstf}[w_2]$ ja $[w_2]R^{rstf}[w_3]$. Tällöin määritelmän mukaan

$$\forall \Box B \in \Gamma\colon M, w_1 \vDash \Box B \Leftrightarrow M, w_2 \vDash \Box B$$

ja

$$\forall \Box B \in \Gamma\colon M, w_2 \vDash \Box B \Leftrightarrow M, w_3 \vDash \Box B.$$

Täten myös

$$\forall \Box B \in \Gamma\colon M, w_1 \vDash \Box B \Leftrightarrow M, w_3 \vDash \Box B,$$

joten $[w_1]R^{rstf}[w_3]$. Olemme näin osoittaneet, että R^{rstf} on myös transitiivinen. $\Box$

Tämän lauseen seurauksena saamme seuraavan tuloksen:

Lause 62. *Systeemillä* **S5** = **KTB4** *on äärellisen kehyksen ominaisuus.*

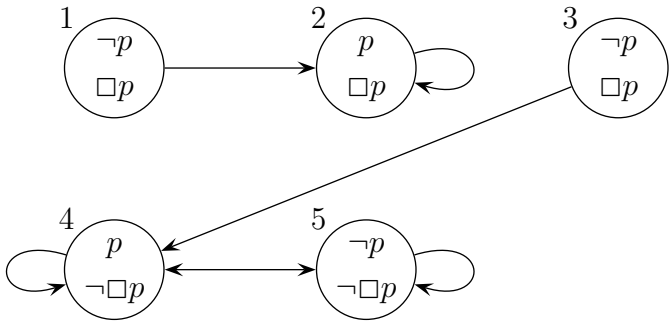
Myös systeemillä **KB4** on äärellisen kehyksen ominaisuus, sillä on mahdollista määritellä filtraatio niin, että vaihtoehtorelaation symmetrisyys ja transitiivisuus säilyvät, ks. [9, s. 106].

Tarkastelemme lopuksi vielä euklidisia filtraatioita. Osoittautuu, että euklidisuuden säilymistä ei voi taata pelkästään asettamalla filtraation vaihtoehtorelaatiolle lisäehtoja, vaan että myös joukon Γ valintaa täytyy vaihtaa.

10.3 Euklidiset filtraatiot

Seuraavassa esimerkissä muodostamme erään euklidisen mallin pienimmän ja suurimman filtraation.

Esimerkki 50. (Vrt. [9, s. 108].) Olkoon $\Gamma = \{\Box p, p\}$ ja $M = \langle W, R, P\rangle$, jossa $W = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 5, 4\rangle, \langle 5, 5\rangle\}$ ja $P(p) = \{2, 4\}$.



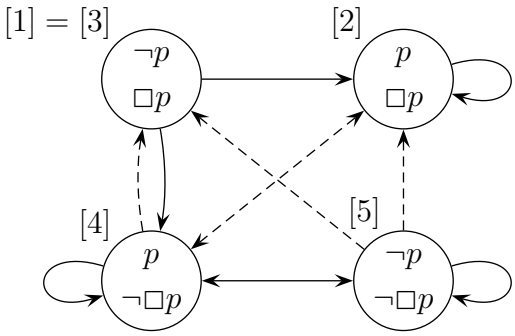
Tällöin $\|\Box p\|^M = \{1, 2, 3\}$, joten $m \sim^M_\Gamma n$, jos ja vain jos $m = n$ tai $m, n \in \{1, 3\}$. Täten siis eri ekvivalenssiluokkia on neljä: $[1] = [3]$, $[2]$, $[4]$ ja $[5]$.

Kun M^* on mallin M Γ-filtraatio $\langle W^*, R^*, P^*\rangle$, niin $W^* = \{[1], [2], [4], [5]\}$ ja $P^*(p) = \{[2], [4]\}$. Pienimmän filtraation vaihtoehtorelaatio

$$R^f = \{\langle [1], [2]\rangle, \langle [2], [2]\rangle, \langle [1], [4]\rangle, \langle [4], [4]\rangle, \langle [4], [5]\rangle, \langle [5], [4]\rangle, \langle [5], [5]\rangle\}$$

ja suurimman filtraation vaihtoehtorelaatio

$$R^F = R^f \cup \{\langle [2], [4]\rangle, \langle [4], [1]\rangle, \langle [4], [2]\rangle, \langle [5], [1]\rangle, \langle [5], [2]\rangle\}.$$



Esimerkin 50 relaatio R on euklidinen, mutta R^f ja R^F eivät ole euklidisia. Olkoon R^* jokin muu mallin M Γ-filtraation vaihtoehtorelaatio. Koska $R^f \subseteq R^*$, niin $[1]R^*[4]$ ja $[1]R^*[2]$. Jotta R^* olisi euklidinen, niin on oltava siis $[4]R^*[2]$. Koska $[4]R^*[5]$, niin täten pitäisi olla voimassa myös $[2]R^*[5]$. Mutta tämä on mahdotonta, sillä $M^*, [5] \not\models p$ ja $M^*, [2] \models \Box p$. Missään mallin M filtraatioissa ei siis vaihtoehtorelaatio voi olla euklidinen. Tarkoittaako tämä siis sitä, että esimerkiksi kaikkien euklidisten mallien luokan determinoivalla systeemillä **K5** ei ole äärellisen mallin ominaisuutta? Vastaus on kielteinen, yllä oleva tulos osoittaa vain sen, että tässä esitelty todistustekniikka ei toimi euklidisten mallien kohdalla. Esitämme seuraavaksi lauseen, jossa todetaan suurimman Γ-filtraation säilyttävän euklidisuuden, kun joukoksi Γ valitaan sekä alikaavojen että modaliteettien suhteen suljettu kaavajoukko. Jälkimmäinen sulkeumaehto tarkoittaa ehtoa

$$A \in \Gamma \Rightarrow \neg A,\ \Box A \in \Gamma.$$

Myös symmetrisyys ja transitiivisuus säilyvät tällaisessa filtraatiossa.

Lause 63. *Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ euklidinen (vastaavasti symmetrinen, transitiivinen) Kripke-malli. Olkoon Γ alikaavojen ja modaliteettien suhteen suljettu kaavajoukko. Tällöin mallin M suurin Γ-filtraatio $\langle W^*, R^F, P^*\rangle$ on euklidinen (vastaavasti symmetrinen, transitiivinen).*

Todistus. Chellas [9, s. 110] esittää todistuksen euklidisuuden osalta. Jätämme sen samoin kuin transitiivisuuden tarkastelun harjoitustehtäväksi ja todistamme tässä vain symmetrisyyttä koskevan tuloksen. Oletamme siis, että R on symmetrinen, ja tarkastelemme mallin M Γ-filtraatiota $\langle W^*, R^F, P^*\rangle$. Oletamme, että $[w]R^F[w']$. Tällöin relaation R^F määritelmän perusteella

$$\forall \Box A \in \Gamma\colon M, w \models \Box A \Rightarrow M, w' \models A. \qquad (*)$$

Oletamme, että $\Box A \in \Gamma$ ja $M, w \not\models A$. Koska R on symmetrinen, niin $M, w \models \Diamond\Box A \to A$ ja täten $M, w \not\models \Diamond\Box A$. Tästä seuraa, että $M, w \models \Box\neg\Box A$, jolloin ehdon $(*)$ mukaisesti $M, w' \models \neg\Box A$ eli $M, w' \not\models \Box A$ (huomaa, että koska Γ on suljettu modaliteettien suhteen, niin $\Box\neg\Box A \in \Gamma$). Olemme näin osoittaneet, että

$$\forall \Box A \in \Gamma\colon M, w' \models \Box A \Rightarrow M, w \models A,$$

joten relaation R^F määritelmän mukaan $[w']R^F[w]$. Kun siis R on symmetrinen, niin myös R^F on symmetrinen. $\Box$

Lauseen 63 tuloksesta ei seuraa vielä suoraan, että esimerkiksi systeemillä **K5** olisi äärellisen kehyksen ominaisuus. Jos nimittäin $A \notin$ **K5**, niin joukko $subA$ on kylläkin äärellinen, mutta sen sulkeuma modaliteettien suhteen on aina ääretön, eikä ole itsestään selvää, että W^* on äärellinen.

Joukon Γ ei tarvitse kuitenkaan olla äärellinen, jotta W^* olisi äärellinen. Riittää, että Γ on *loogisesti äärellinen suhteessa* malliin M. Tämä tarkoittaa sitä, että on olemassa sellainen äärellinen $\Gamma' \subset \Gamma$, että aina, kun kaava $A \in \Gamma$, niin on olemassa sellainen kaava $A' \in \Gamma'$, että $M \models A \leftrightarrow A'$. Tällöin joukko W^* on äärellinen (harjoitustehtävä, vrt. [9, s. 43]).

Jos malli M on sellainen, että sen avulla on erotettavissa vain äärellinen määrä modaliteetteja toisistaan, niin äärellisen kaavajoukon sulkeuma modaliteettien suhteen on loogisesti äärellinen suhteessa malliin M (harjoitustehtävä). Kun M on euklidinen malli,

niin sen avulla voidaan erottaa vain 14 modaliteettia toisistaan (harjoitustehtävä, vrt. [9, s. 150]).

Oletamme, että kehysten luokka $\mathcal{C}$ determinoi systeemin $\mathbf{\Sigma}$, jokaisen kehyksen $F \in \mathcal{C}$ vaihtoehtorelaatio on euklidinen (sen lisäksi sille voidaan asettaa muitakin ehtoja) ja $A \notin \mathbf{\Sigma}$. Tällöin siis on olemassa sellainen kehys $F \in \mathcal{C}$ ja siihen liittyvä (euklidinen) malli $M = \langle F, P \rangle$, että $M \not\models A$. Kun valitsemme joukoksi Γ kaavan A alikaavojen joukon $subA$ sulkeuman modaliteettien suhteen, niin Γ on loogisesti äärellinen suhteessa euklidiseen malliin M. Täten mallin M Γ-filtraatiossa $\langle W^*, R^F, P^* \rangle$ joukko W^* on äärellinen. Jos nyt kehyksiä $F \in \mathcal{C}$ on luonnehdittu asettamalla niiden vaihtoehtorelaatioille (euklidisuuden lisäksi) sellaisia ehtoja, jotka säilyvät tämänkaltaisissa filtraatioissa, niin systeemillä $\mathbf{\Sigma}$ on äärellisen mallin ominaisuus. Saamme siis esimerkiksi lauseen 63 perusteella seuraavat tulokset:

Lause 64. *Systeemeillä* **K5**, **K45** *ja* **KB5** *on äärellisen kehyksen ominaisuus.*

Viitteet

[1] Anderson, A. R. & Belnap, N. D., *Entailment: the Logic of Relevance and Necessity*, volume I. Princeton University Press, Princeton, 1975.

[2] Anderson, A. R. & Belnap, N. D. & Dunn, J. M., *Entailment: the Logic of Relevance and Necessity*, volume II. Princeton University Press, Princeton, 1992.

[3] Blackburn, P. & de Rijke, M. & Venema, Y., *Modal Logic*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[4] Bradley, R. & Swartz, N., *Possible Worlds*. Basil Blackwell Ltd, Oxford, 1979.

[5] Bull, R. A. & Segerberg, K., 'Basic modal logic'. Teoksessa D. Gabbay and F. Guenthner (toim.), *Handbook of Philosophical Logic*, volume II. D. Reidel Publishing Company, 1984, s. 1–88.

[6] Carnap, R., 'Testability and meaning (I)', *Philosophy of Science* 3, 1936, s. 419–471.

[7] Carnap, R., 'Testability and meaning (II)', *Philosophy of Science* 4, 1937, s. 1–40.

[8] Carnap, R., *Meaning and Necessity. A Study in Semantics and Modal Logic*. Chicago University Press, Chicago, 1947.

[9] Chellas, B. F., *Modal Logic: An Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[10] Chisholm, R. M., 'Contrary-to-duty imperatives and deontic logic', *Analysis* 24, 1963, s. 33–36.

[11] Cresswell, M. J., 'Classical Intensional Logics', *Theoria* 36, 1970, s. 347–372.

[12] Dunn, M., 'Relevance logic and entailment'. Teoksessa D. Gabbay and F. Guenthner (toim.), *Handbook of Philosophical Logic*, volume III. D. Reidel Publishing Company, 1986, s. 117–224.

[13] Føllesdal, D. & Hilpinen, R., 'Deontic logic: an introduction.' Teoksessa R. Hilpinen (toim.), *Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings*. D. Reidel Publishing Company, 1971, s. 1–35.

[14] Goodman, N., *Ways of Worldmaking*. Hackett Publishing Co., Indianapolis, 1978.

[15] Goodman, N., *Fact, Fiction, and Forecast* (3. p.). The Harvester Press, Hassocks, 1979.

[16] Haaparanta, L., 'Frege and his German contemporaries on alethic modalities', teoksessa S. Knuuttila (toim.), *Modern Modalities: Studies of the History of Modal Theories from Medieval Nominalism to Logical Positivism*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988, pp. s. 239–274.

[17] Harel, D., 'Dynamic logic'. Teoksessa D. Gabbay and F. Guenthner (toim.), *Handbook of Philosophical Logic*, volume II. D. Reidel Publishing Company, 1984, s. 497–604.

[18] Hintikka, J., 'Modality as referential multiplicity', *Ajatus* 20, 1957, s. 49–64.

[19] Hintikka, J., 'Modality and quantification', *Theoria* 27 (1961), s. 119–128.

[20] Hintikka, J., *Knowledge and Belief: an Introduction to the Logic of the Two Notions*. Cornell University Press, Ithaca, N.Y., 1962.

[21] Hintikka, J., *Models for Modalities. Selected Essays*. D. Reidel Publishing Company, 1969.

[22] Hintikka, J., *Time and Necessity. Studies in Aristotle's Theory of Modality*. Clarendon, 1973.

[23] Hintikka, J., *The Intentions of Intentionality and Other New Models for Modalities.* D. Reidel, Dordrecht, 1975.

[24] Hughes, G. E. & Cresswell, M. J., *An Introduction to Modal Logic.* Methuen, London, 1968.

[25] Hughes, G. E. & Cresswell, M. J., *A Companion to Modal Logic.* Methuen, London, 1984.

[26] Innala, H. & Rantala, V. & Virtanen, A., *Deonttisesta logiikasta*, käsikirjoitus. Saatavilla Internetistä: ⟨http://mtl.uta.fi/modaalilogiikka/dl.pdf⟩.

[27] Ishiguro, H., 'Contingent truths and possible worlds', teoksessa R. S. Woolhouse (toim.), *Leibniz: Metaphysics and Philosophy of Science.* Oxford University Press, 1981, s. 64–76.

[28] Kanger, S., *Provability in Logic*, Acta Universitatis Stockholmiensis, Stockholm Studies in Philosophy 1, Stockholm, 1957.

[29] Kanger, S., 'A completeness theorem in modal logic', *Theoria* 23, 1957.

[30] Knuuttila, S., 'Time and modality in scholasticism', teoksessa S. Knuuttila (toim.), *Reforging the Great Chain of Being.* D. Reidel Publishing Company, 1981.

[31] Knuuttila, S., *Modalities in Medieval Philosophy.* Routledge, London, 1993.

[32] Knuuttila, S., 'Descartesin käsitys välttämättömyydestä ja mahdollisuudesta', niin & näin 4, 1996, s. 18–20.

[33] Kripke, S., 'A completeness theorem in modal logic', *the Journal of Symbolic Logic* 24, 1959, s. 1–14.

[34] Kripke, S., 'Semantical analysis of modal logic' (konferenssiabstrakti), *the Journal of Symbolic Logic* 24, 1959, s. 323–324.

[35] Kripke, S., 'Semantical analysis of modal logic I, normal modal propositional calculi', *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 9, 1963, s. 67–96.

[36] Kripke, S., 'Semantical considerations on modal logic', *Acta Philosophica Fennica* 16, 1963, s. 83–94.

[37] Kripke, S., *Semantical Analysis of Intuitionistic Logic*, teoksessa J. N. Crossley, M. Dummett (toim.), *Formal Systems and Recursive Function Theory.* North Holland, Amsterdam, 1965, pp. s. 92–129.

[38] Lemmon, E. J. & Scott, D. S., *The 'Lemmon notes': An Introduction to Modal Logic*, toim. K. Segerberg. Blackwell, Oxford, 1977.

[39] Lewis, C. I., 'Implication and the algebra of logic', *Mind*, 1912, s. 522–531.

[40] Lewis, C. I., *A Survey of Symbolic Logic.* University of California Press, Berkeley, 1918.

[41] Lewis, D., *Counterfactuals.* Blackwell, Oxford, 1973.

[42] Lewis, D., *On the Plurality of Worlds.* Blackwell, Oxford, 1986.

[43] Lovejoy, A. O., *The Great Chain of Being: a Study of the History of an Idea.* Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1936.

[44] Merikoski, J., Virtanen, A. & Koivisto, P., *Diskreetti matematiikka I*, 10. p., Tampereen yliopisto, Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos, B 42, 2000.

[45] Montague, R., 'Logical necessity, physical necessity, ethics, and quantifiers', *Inquiry* 4, 1960, s. 259–269. Sisältyy myös teokseen R. H. Thomason (toim.), *Formal Philosophy.* Yale University Press, 1974, s. 71–83.

[46] Montague, R., 'Pragmatics', teoksessa R. Klibansky (toim.), *Contemporary Philosophy: A Survey*, La Nuova Italia Editrice, Florence, 1968, s. 102–122. Sisältyy myös teokseen R. H. Thomason (toim.), *Formal Philosophy.* Yale University Press, 1974, s. 95–118.

[47] Nute, D., 'Conditional logic'. Teoksessa D. Gabbay & F. Guenthner (toim.), *Handbook of Philosophical Logic*, volume II. D. Reidel Publishing Company, 1984, s. 387–439.

[48] Prior, A. N., 'The paradoxes of derived obligation', *Mind* 63, 1954, s. 64–65

[49] Quine, W. V. O., *From a Logical Point of View.* Harper & Row, Publishers, New York, 1963 (toinen, uudistettu painos).

[50] Rantala, V., 'Impossible Worlds Semantics and Logical Omniscience'. Teoksessa I. Niiniluoto and E. Saarinen (toim.), *Intensional Logic: Theory and Applications.* Acta Philosophica Fennica, vol. 35, Helsinki, 1982, s. 106–115.

[51] Rantala, V., 'Quantified Modal Logic: Non-Normal Worlds and Propositional Attitudes', *Studia Logica* 41, 1982, s. 41–65.

[52] Rantala, V. & Virtanen, A., *Logiikan peruskurssi*, kokeilumoniste. Saatavilla Internetistä: ⟨http://mtl.uta.fi/modaalilogiikka/logpk2003.pdf⟩.

[53] Rantala, V. & Virtanen, A., *Joukko-opin alkeita*, lyhyt kokeilumoniste. Saatavilla Internetistä: ⟨http://mtl.uta.fi/modaalilogiikka/liitejoukoista.pdf⟩.

[54] Rantala, V. & Virtanen, A., 'Kuka keksikään Kripke-semantiikan?', teoksessa I. Koskinen, P. Limnell ja T. Vuorio (toim.), *Luonto toisena, toinen luontona. Kirjoituksia Lauri Mehtosen 50-vuotispäivän kunniaksi*, Tampere, 1996, s. 201–217.

[55] Rescher, N. & Brandom, R., *The Logic of Inconsistency.* Basil Blackwell, Oxford, 1980.

[56] Ross, A., 'Imperatives and logic', *Theoria* 7, 1941, s. 3–71.

[57] Salminen, H. & Väänänen, J., *Johdatus logiikkaan.* Oy Gaudeamus Ab, Helsinki, 1992.

[58] Segerberg, K., *An Essay in Classical Modal Logic.* Uppsala Filosofiska Studier, 1971.

[59] Sorabji, R., *Necessity, Cause, and Blame, Perspectives on Aristotle's Theory.* Cornell University Press, 1980.

[60] Stalnaker, R. 'A theory of conditionals', teoksessa N. Rescher (toim), *Studies in Logical Theory*, American Philosophical Quarterly Monograph Series. Blackwell, Oxford, 1968, s. 98–122.

[61] van Benthem, J., 'Correspondence theory'. Teoksessa D. Gabbay and F. Guenthner (toim.), *Handbook of Philosophical Logic*, volume II. D. Reidel Publishing Company, 1984, s. 167–247.

[62] van Dalen, D., 'Intuitionistic logic'. Teoksessa D. Gabbay and F. Guenthner (toim.), *Handbook of Philosophical Logic*, volume III. D. Reidel Publishing Company, 1986, s. 225–339.

[63] Virtanen, A., 'Yleinen semantiikka modaaliselle lauselogiikalle', teoksessa L. Haaparanta, I. Koskinen, E. Oesch, T. Vadén (toim.), *Malli Metodi Merkitys. Esseitä Veikko Rantalan 60-vuotispäivän kunniaksi* Filosofisia tutkimuksia Tampereen yliopistosta 49, 1993, s. 119–136.

[64] von Wright, G. H., *An Essay in modal Logic.* North-Holland, Amsterdam, 1951.

[65] von Wright, G. H., 'Deontic logic', *Mind* 60, 1951, s. 1–15.

[66] von Wright, G. H., *An Essay in Deontic Logic and the General Theory of Action.* Acta Philosophica Fennica, North-Holland, Amsterdam, 1968.

[67] von Wright, G. H., *Logiikka, filosofia ja kieli* (3. p.). Otava, Helsinki, 1975.

[68] Åqvist, L., 'Deontic Logic'. Teoksessa D. Gabbay and F. Guenthner (toim.), *Handbook of Philosophical Logic*, volume II. D. Reidel Publishing Company, 1984, s. 605–714.