Johdatus graafiteoriaan

Syksy 2017

Lauri Hella

Tampereen yliopisto
Luonnontieteiden tiedekunta

Luku 3

Puut

3.1 Puu
3.2 Virittävä puu
3.3 Virittävän puun konstruointi
3.4 Minimaalinen virittävä puu
3.5 Metsä
3.6 Silmukka ja irrotusjoukko
3.7 Perussilmukka ja perusirrotusjoukko
3.8 Graafin vektoriavaruus

3.1 Puu

Tässä luvussa tarkastellaan yhtenäisiä silmukattomia graafeja eli puita.

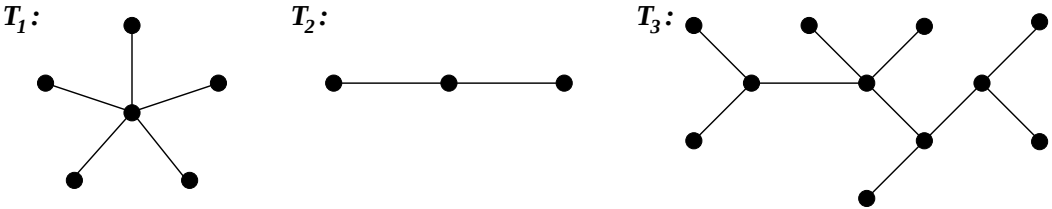
Määritelmä 3.1
Puu on suuntaamaton yhtenäinen silmukaton graafi. Jos puu on graafin G aligraafi, kyseessä on graafin G *alipuu*.

3.1 Puu

Tässä luvussa tarkastellaan yhtenäisiä silmukattomia graafeja eli puita.

Määritelmä 3.1
Puu on suuntaamaton yhtenäinen silmukaton graafi. Jos puu on graafin G aligraafi, kyseessä on graafin G *alipuu*.

Esimerkki 3.1
Kuvassa 3.1 on muutamia puita. Kuvassa 3.2 taas on pari esimerkkiä orgaanisesta kemiasta, jossa avoketjuisia hiilivetyjä mallinnetaan puiden avulla.



Kuva 3.1. Esimerkkejä puista.

Kuva 3.2. Metaani- ja etaanimolekyylien rakennekaavat.

Todistamme ensiksi, että n-solmuisessa puussa on $n-1$ särmää ja m-särmäisessä puussa vastaavasti $m+1$ solmua.

Todistamme ensiksi, että n-solmuisessa puussa on $n-1$ särmää ja m-särmäisessä puussa vastaavasti $m+1$ solmua.

Lause 3.1

Puun kahden solmun välillä on täsmälleen yksi suora polku

Todistamme ensiksi, että n-solmuisessa puussa on $n-1$ särmää ja m-särmäisessä puussa vastaavasti $m+1$ solmua.

Lause 3.1
Puun kahden solmun välillä on täsmälleen yksi suora polku

Lause 3.2
Jos puussa on n solmua ja m särmää, niin $m = n-1$.

Todistamme ensiksi, että n-solmuisessa puussa on $n-1$ särmää ja m-särmäisessä puussa vastaavasti $m+1$ solmua.

Lause 3.1
Puun kahden solmun välillä on täsmälleen yksi suora polku

Lause 3.2
Jos puussa on n solmua ja m särmää, niin $m = n-1$.

Lause 3.3
Olkoon G silmukaton $(n-1)$-särmäinen graafi, jossa on korkeintaan n solmua. Tällöin G on puu, jossa on n solmua.

Lause 3.4

Olkoon G jokin n-solmuinen m-särmäinen graafi. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.

1. *Graafi G on puu.*

Lause 3.4

Olkoon G jokin n-solmuinen m-särmäinen graafi. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.

1. *Graafi G on puu.*
2. *Graafin G jokaisen kahden solmun välillä on täsmälleen yksi suora polku eikä graafissa G ole luuppeja.*

Lause 3.4

Olkoon G jokin n-solmuinen m-särmäinen graafi. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.

1. *Graafi G on puu.*
2. *Graafin G jokaisen kahden solmun välillä on täsmälleen yksi suora polku eikä graafissa G ole luuppeja.*
3. *Graafi G on yhtenäinen ja $m = n - 1$.*

Lause 3.4

Olkoon G jokin n-solmuinen m-särmäinen graafi. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.

1. *Graafi G on puu.*
2. *Graafin G jokaisen kahden solmun välillä on täsmälleen yksi suora polku eikä graafissa G ole luuppeja.*
3. *Graafi G on yhtenäinen ja $m = n - 1$.*
4. *Graafi G on silmukaton ja $m = n - 1$.*

Lause 3.4

Olkoon G jokin n-solmuinen m-särmäinen graafi. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.

1. *Graafi G on puu.*
2. *Graafin G jokaisen kahden solmun välillä on täsmälleen yksi suora polku eikä graafissa G ole luuppeja.*
3. *Graafi G on yhtenäinen ja $m = n - 1$.*
4. *Graafi G on silmukaton ja $m = n - 1$.*
5. *Graafi G on silmukaton ja lisäämällä graafiin G mikä tahansa uusi särmä saadaan graafi, jossa on täsmälleen yksi silmukka.*

Lause 3.4

Olkoon G jokin n-solmuinen m-särmäinen graafi. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.

1. *Graafi G on puu.*
2. *Graafin G jokaisen kahden solmun välillä on täsmälleen yksi suora polku eikä graafissa G ole luuppeja.*
3. *Graafi G on yhtenäinen ja $m = n - 1$.*
4. *Graafi G on silmukaton ja $m = n - 1$.*
5. *Graafi G on silmukaton ja lisäämällä graafiin G mikä tahansa uusi särmä saadaan graafi, jossa on täsmälleen yksi silmukka.*

Lause 3.4

Olkoon G jokin n-solmuinen m-särmäinen graafi. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.

1. *Graafi G on puu.*
2. *Graafin G jokaisen kahden solmun välillä on täsmälleen yksi suora polku eikä graafissa G ole luuppeja.*
3. *Graafi G on yhtenäinen ja $m = n - 1$.*
4. *Graafi G on silmukaton ja $m = n - 1$.*
5. *Graafi G on silmukaton ja lisäämällä graafiin G mikä tahansa uusi särmä saadaan graafi, jossa on täsmälleen yksi silmukka.*

Lause 3.5

Vähintään kaksisolmuisessa puussa on ainakin kaksi loppusolmua.

Lause 3.4

Olkoon G jokin n-solmuinen m-särmäinen graafi. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.

1. *Graafi G on puu.*
2. *Graafin G jokaisen kahden solmun välillä on täsmälleen yksi suora polku eikä graafissa G ole luuppeja.*
3. *Graafi G on yhtenäinen ja $m = n - 1$.*
4. *Graafi G on silmukaton ja $m = n - 1$.*
5. *Graafi G on silmukaton ja lisäämällä graafiin G mikä tahansa uusi särmä saadaan graafi, jossa on täsmälleen yksi silmukka.*

Lause 3.5

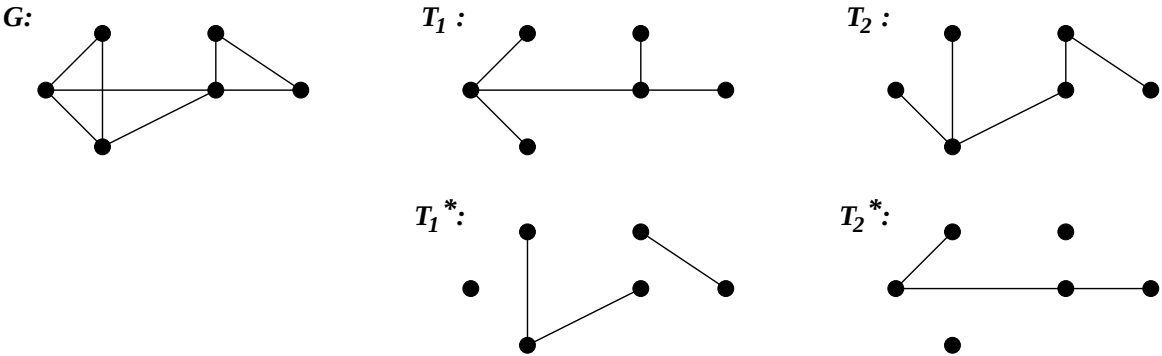
Vähintään kaksisolmuisessa puussa on ainakin kaksi loppusolmua.

Lause 3.5 voidaan todistaa myös osoittamalla, että puussa ei-irrotussolmut ovat loppusolmuja. (Totea.)

3.2 Virittävä puu

Määritelmän 1.25 mukaan aligraafi, jossa on kaikki graafin solmut, on virittävä aligraafi. Virittävä puu on tämän erikoistapaus.

Määritelmä 3.2
Graafin G *virittävä puu* on graafin G alipuu, joka sisältää kaikki graafin G solmut. Jos T on graafin G virittävä puu, niin $T^* = G - T$ on graafin G *virittävä vastapuu*. Virittävän puun särmiä sanotaan myös *oksiksi* ja virittävän vastapuun särmiä *siteiksi* tai *kaariksi*.



Kuva 3.3. Graafin G virittävät puut T_1 ja T_2 sekä virittävät vastapuut T_1^* ja T_2^*.

Kaikilla graafeilla ei ole virittävää puuta (ks. lause 3.9). Toisaalta graafilla voi olla useita virittäviä puita (ks. kuva 3.3). Virittävä vastapuu ei yleensä ole puu.

Lause 3.6

Olkoon H jonkin n-solmuisen graafin G jokin n-solmuinen ja m-särmäinen aligraafi. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.

1. *Graafi H on graafin G virittävä puu.*

Lause 3.6

Olkoon H jonkin n-solmuisen graafin G jokin n-solmuinen ja m-särmäinen aligraafi. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.

1. *Graafi H on graafin G virittävä puu.*
2. *Graafin H jokaisen kahden solmun välillä on täsmälleen yksi suora polku eikä graafissa H ole luuppeja.*

Lause 3.6

Olkoon H jonkin n-solmuisen graafin G jokin n-solmuinen ja m-särmäinen aligraafi. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.

1. *Graafi H on graafin G virittävä puu.*
2. *Graafin H jokaisen kahden solmun välillä on täsmälleen yksi suora polku eikä graafissa H ole luuppeja.*
3. *Graafi H on yhtenäinen ja $m = n - 1$.*

Lause 3.6

Olkoon H jonkin n-solmuisen graafin G jokin n-solmuinen ja m-särmäinen aligraafi. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.

1. *Graafi H on graafin G virittävä puu.*
2. *Graafin H jokaisen kahden solmun välillä on täsmälleen yksi suora polku eikä graafissa H ole luuppeja.*
3. *Graafi H on yhtenäinen ja $m = n - 1$.*
4. *Graafi H on silmukaton ja $m = n - 1$.*

Lause 3.6

Olkoon H jonkin n-solmuisen graafin G jokin n-solmuinen ja m-särmäinen aligraafi. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.

1. *Graafi H on graafin G virittävä puu.*
2. *Graafin H jokaisen kahden solmun välillä on täsmälleen yksi suora polku eikä graafissa H ole luuppeja.*
3. *Graafi H on yhtenäinen ja $m = n - 1$.*
4. *Graafi H on silmukaton ja $m = n - 1$.*
5. *Graafi H on silmukaton ja lisäämällä graafiin H mikä tahansa uusi särmä saadaan graafi, jossa on täsmälleen yksi silmukka.*

Lause 3.6

Olkoon H jonkin n-solmuisen graafin G jokin n-solmuinen ja m-särmäinen aligraafi. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.

1. *Graafi H on graafin G virittävä puu.*
2. *Graafin H jokaisen kahden solmun välillä on täsmälleen yksi suora polku eikä graafissa H ole luuppeja.*
3. *Graafi H on yhtenäinen ja $m = n - 1$.*
4. *Graafi H on silmukaton ja $m = n - 1$.*
5. *Graafi H on silmukaton ja lisäämällä graafiin H mikä tahansa uusi särmä saadaan graafi, jossa on täsmälleen yksi silmukka.*

Lause 3.6

Olkoon H jonkin n-solmuisen graafin G jokin n-solmuinen ja m-särmäinen aligraafi. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.

1. *Graafi H on graafin G virittävä puu.*
2. *Graafin H jokaisen kahden solmun välillä on täsmälleen yksi suora polku eikä graafissa H ole luuppeja.*
3. *Graafi H on yhtenäinen ja $m = n - 1$.*
4. *Graafi H on silmukaton ja $m = n - 1$.*
5. *Graafi H on silmukaton ja lisäämällä graafiin H mikä tahansa uusi särmä saadaan graafi, jossa on täsmälleen yksi silmukka.*

Koska $(n-1)$-särmäisessä, silmukattomassa ja yhtenäisessä graafissa on n solmua, lauseen 3.6 kohdista 3 ja 4 seuraa edelleen seuraava lause.

Lause 3.7

Olkoon G jokin n-solmuinen graafi. Tällöin graafin G aligraafi H on graafin G virittävä puu täsmälleen silloin, kun graafissa H on $n-1$ särmää ja H on yhtenäinen sekä silmukaton.

Lause 3.7

Olkoon G jokin n-solmuinen graafi. Tällöin graafin G aligraafi H on graafin G virittävä puu täsmälleen silloin, kun graafissa H on $n-1$ särmää ja H on yhtenäinen sekä silmukaton.

Virittävän puun määritelmän ja edellä olevien lauseiden perusteella n-solmuisen graafin G aligraafi H on graafin G virittävä puu, jos graafilla H on jotkin kolme seuraavasta neljästä ominaisuudesta.

1. Graafissa H on n solmua.
2. Graafi H on yhtenäinen.
3. Graafissa H on $n-1$ särmää.
4. Graafi H on silmukaton.

Lause 3.7

Olkoon G jokin n-solmuinen graafi. Tällöin graafin G aligraafi H on graafin G virittävä puu täsmälleen silloin, kun graafissa H on $n-1$ särmää ja H on yhtenäinen sekä silmukaton.

Virittävän puun määritelmän ja edellä olevien lauseiden perusteella n-solmuisen graafin G aligraafi H on graafin G virittävä puu, jos graafilla H on jotkin kolme seuraavasta neljästä ominaisuudesta.

1. Graafissa H on n solmua.
2. Graafi H on yhtenäinen.
3. Graafissa H on $n-1$ särmää.
4. Graafi H on silmukaton.

Itse asiassa pelkästään ominaisuudet 3 ja 4 yhdessä riittävät takaamaan, että aligraafi H on virittävä puu.

Lause 3.8

Olkoon G jokin n-solmuinen graafi. Tällöin graafin G aligraafi H on graafin G virittävä puu täsmälleen silloin, kun graafissa H on $n-1$ särmää ja H on silmukaton.

Lause 3.8

Olkoon G jokin n-solmuinen graafi. Tällöin graafin G aligraafi H on graafin G virittävä puu täsmälleen silloin, kun graafissa H on $n-1$ särmää ja H on silmukaton.

Lause 3.9

Graafi on yhtenäinen täsmälleen silloin, kun sillä on virittävä puu.

Lause 3.8

Olkoon G jokin n-solmuinen graafi. Tällöin graafin G aligraafi H on graafin G virittävä puu täsmälleen silloin, kun graafissa H on $n-1$ särmää ja H on silmukaton.

Lause 3.9

Graafi on yhtenäinen täsmälleen silloin, kun sillä on virittävä puu.

Lause 3.10

Olkoon $G = (V, E)$ yhtenäinen graafi ja $F \subseteq E$. Tällöin $G - F$ on epäyhtenäinen täsmälleen silloin, kun F sisältää ainakin yhden särmän jokaisesta graafin G virittävästä puusta.

Lause 3.8
Olkoon G jokin n-solmuinen graafi. Tällöin graafin G aligraafi H on graafin G virittävä puu täsmälleen silloin, kun graafissa H on $n-1$ särmää ja H on silmukaton.

Lause 3.9
Graafi on yhtenäinen täsmälleen silloin, kun sillä on virittävä puu.

Lause 3.10
Olkoon $G=(V,E)$ yhtenäinen graafi ja $F \subseteq E$. Tällöin $G-F$ on epäyhtenäinen täsmälleen silloin, kun F sisältää ainakin yhden särmän jokaisesta graafin G virittävästä puusta.

Lause 3.11
Yhtenäisen graafin G aligraafi H on jonkin graafin G virittävän puun aligraafi täsmälleen silloin, kun H on silmukaton.

3.3 Virittävän puun konstruointi

Seuraavaksi esitetään kolme eri menetelmää annetun yhtenäisen graafin virittävän puun konstruoimiseksi: *silmukoiden poistaminen*, *syvyyssuuntainen etsintä* ja *leveyssuuntainen etsintä*.

3.3 Virittävän puun konstruointi

Seuraavaksi esitetään kolme eri menetelmää annetun yhtenäisen graafin virittävän puun konstruoimiseksi: *silmukoiden poistaminen*, *syvyyssuuntainen etsintä* ja *leveyssuuntainen etsintä*.

Algoritmi 3.1 (Silmukoiden poistaminen)

Virittävän puun muodostaminen silmukoita poistamalla perustuu lauseen 3.9 todistukseen. Tällöin siis virittävä puu muodostetaan seuraavasti.

1. Jos (jäljellä olevassa) graafissa ei ole silmukoita, lopetetaan.
2. Muussa tapauksessa valitaan jokin (jäljellä olevan) graafin silmukka ja poistetaan siitä yksi särmä.
3. Jatketaan kohdasta 1.

3.3 Virittävän puun konstruointi

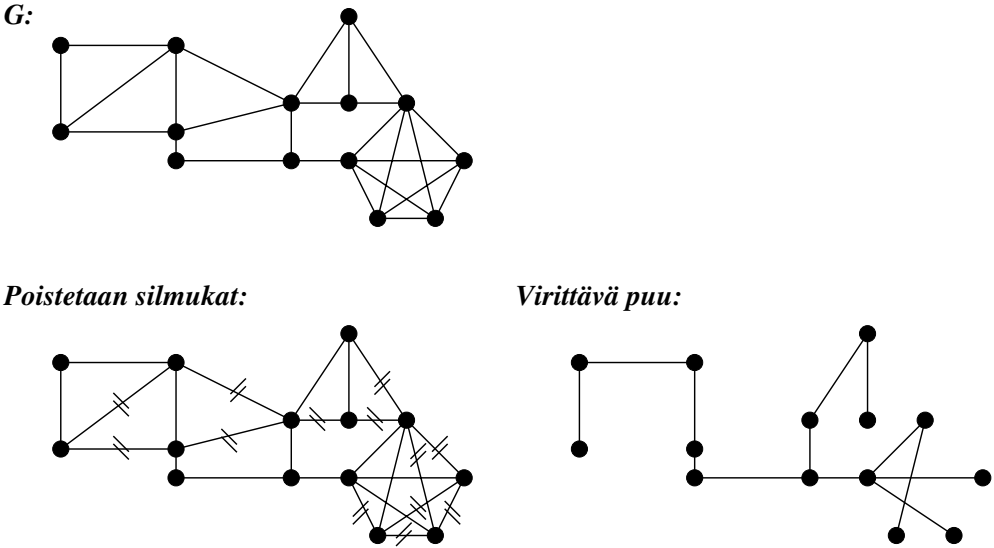
Seuraavaksi esitetään kolme eri menetelmää annetun yhtenäisen graafin virittävän puun konstruoimiseksi: *silmukoiden poistaminen*, *syvyyssuuntainen etsintä* ja *leveyssuuntainen etsintä*.

Algoritmi 3.1 (Silmukoiden poistaminen)

Virittävän puun muodostaminen silmukoita poistamalla perustuu lauseen 3.9 todistukseen. Tällöin siis virittävä puu muodostetaan seuraavasti.

1. Jos (jäljellä olevassa) graafissa ei ole silmukoita, lopetetaan.
2. Muussa tapauksessa valitaan jokin (jäljellä olevan) graafin silmukka ja poistetaan siitä yksi särmä.
3. Jatketaan kohdasta 1.

Tämä algoritmi vaatii alirutiinin, jonka avulla etsitään silmukoita. Se on siksi raskas toteuttaa ja sillä on lähinnä teoreettista mielenkiintoa.

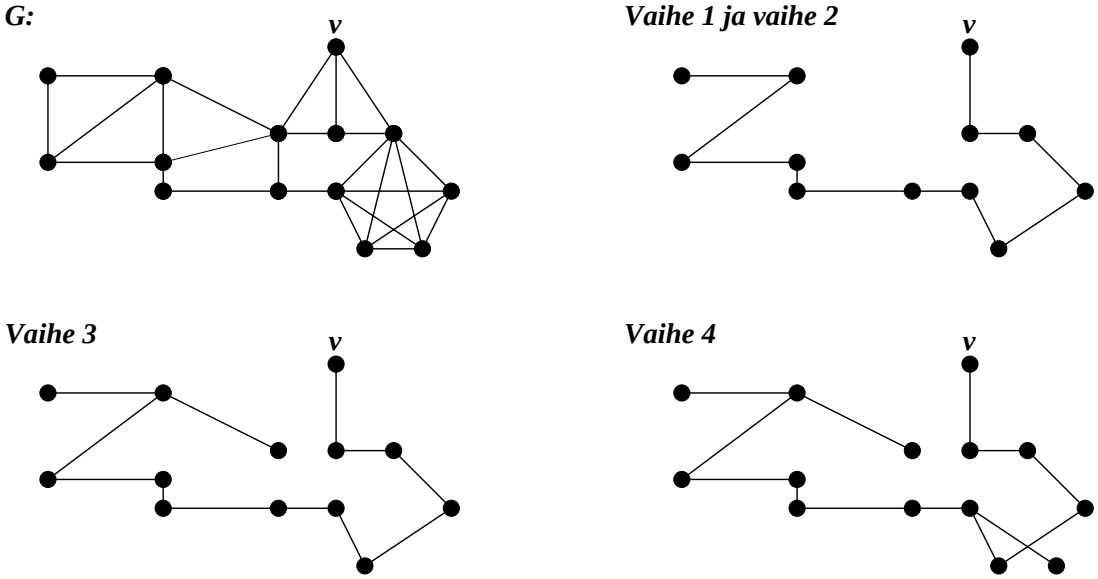


Kuva 3.4. Graafin G virittävän puun muodostaminen poistamalla silmukat.

Algoritmi 3.2 (Syvyyssuuntainen etsintä)

Syvyyssuuntaisessa etsinnässä virittävä puu muodostetaan seuraavasti.

1. Valitaan aloitussolmu mielivaltaisesti.
2. Edetään aloitussolmusta lähtien särmiä ja solmuja peräkkäin lisäämällä niin pitkälle kuin mahdollista ilman, että syntyy silmukoita.
3. Jos tarpeen, palataan polulla niin monta solmua taaksepäin, että voidaan jatkaa uuteen suuntaan lisäämällä särmiä ja solmuja peräkkäin.
4. Jatketaan menettelyä (kohta 3) kunnes kaikki solmut on saavutettu.



Kuva 3.5. Syvyyssuuntainen etsintä. Aloitussolmuna on solmu u.

Algoritmi 3.3 (Leveyssuuntainen etsintä)

Leveyssuuntaisessa etsinnässä virittävä puu muodostetaan seuraavasti.

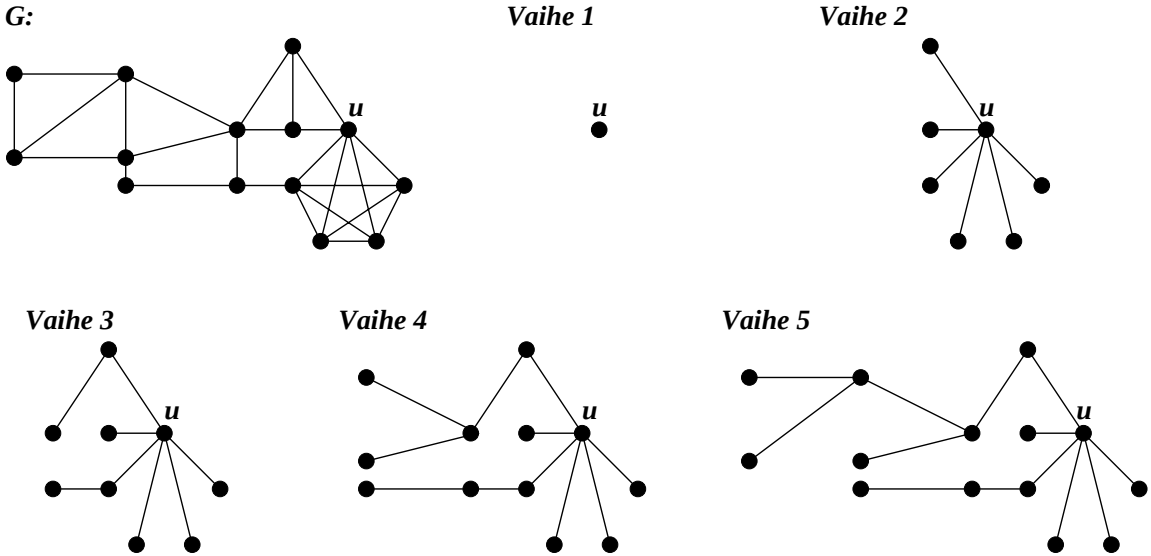
1. Valitaan aloitussolmu mielivaltaisesti.
2. Lisätään kaikki särmät, joiden päätesolmuna aloitussolmu on, ja särmiä vastaavat toiset päätesolmut, mutta kuitenkin niin, että ei synny silmukoita.
3. Jos tarpeen, toimitaan kunkin lisätyn solmun osalta kuten kohdassa 2.
4. Jatketaan menettelyä (kohta 3) kunnes kaikki solmut on saavutettu.

Algoritmi 3.3 (Leveyssuuntainen etsintä)

Leveyssuuntaisessa etsinnässä virittävä puu muodostetaan seuraavasti.

1. Valitaan aloitussolmu mielivaltaisesti.
2. Lisätään kaikki särmät, joiden päätesolmuna aloitussolmu on, ja särmiä vastaavat toiset päätesolmut, mutta kuitenkin niin, että ei synny silmukoita.
3. Jos tarpeen, toimitaan kunkin lisätyn solmun osalta kuten kohdassa 2.
4. Jatketaan menettelyä (kohta 3) kunnes kaikki solmut on saavutettu.

Jos leveyssuuntaisen etsinnän lähtögraafi on yksinkertainen graafi, ei kohdassa 2 tarvitse aloitussolmusta lähdettäessä varmistaa, että silmukoita ei synny.

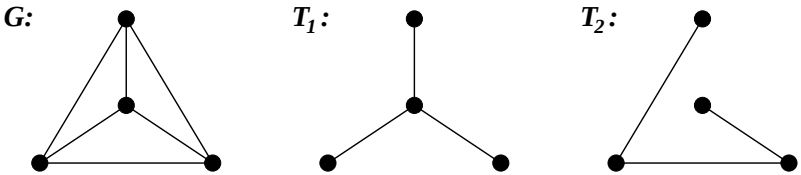


Kuva 3.6. Leveyssuuntainen etsintä. Aloitussolmuna on solmu u.

Silmukoita poistamalla on mahdollista saada tulokseksi mikä tahansa yksittäinen virittävä puu. Syvyyssuuntaisella tai leveyssuuntaisella etsinnällä tämä ei välttämättä ole mahdollista.

Esimerkki 3.2

Kuvan 3.7 puu T_1 on graafin G virittävä puu, jota ei ole mahdollista saada syvyyssuuntaisella etsinnällä, ja T_2 on graafin G virittävä puu, jota ei ole mahdollista saada leveyssuuntaisella etsinnällä.



Kuva 3.7. Graafi G ja kaksi graafin G virittävää puuta.

3.4 Minimaalinen virittävä puu

Painotetun graafin särmille on määritelty paino ja graafin jonkin virittävän puun särmien painojen summa on pienin. Tämän puun etsiminen on yksi algoritmisen graafiteorian ongelmista.

3.4 Minimaalinen virittävä puu

Painotetun graafin särmille on määritelty paino ja graafin jonkin virittävän puun särmien painojen summa on pienin. Tämän puun etsiminen on yksi algoritmisen graafiteorian ongelmista.

Määritelmä 3.3

Yhtenäisen painotetun graafin *minimaalinen virittävä puu* on graafin virittävä puu, jonka särmien painojen summa on pienin.

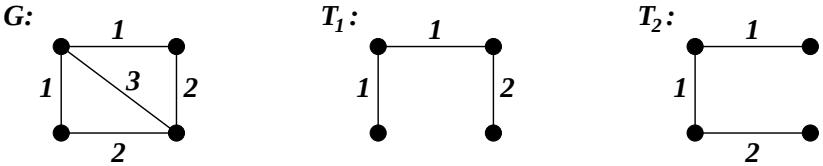
3.4 Minimaalinen virittävä puu

Painotetun graafin särmille on määritelty paino ja graafin jonkin virittävän puun särmien painojen summa on pienin. Tämän puun etsiminen on yksi algoritmisen graafiteorian ongelmista.

Määritelmä 3.3

Yhtenäisen painotetun graafin *minimaalinen virittävä puu* on graafin virittävä puu, jonka särmien painojen summa on pienin.

Minimaalinen virittävä puu ei välttämättä ole yksikäsitteinen (ks. kuva 3.8).



Kuva 3.8. Graafin G minimaaliset virittävät puut T_1 ja T_2.

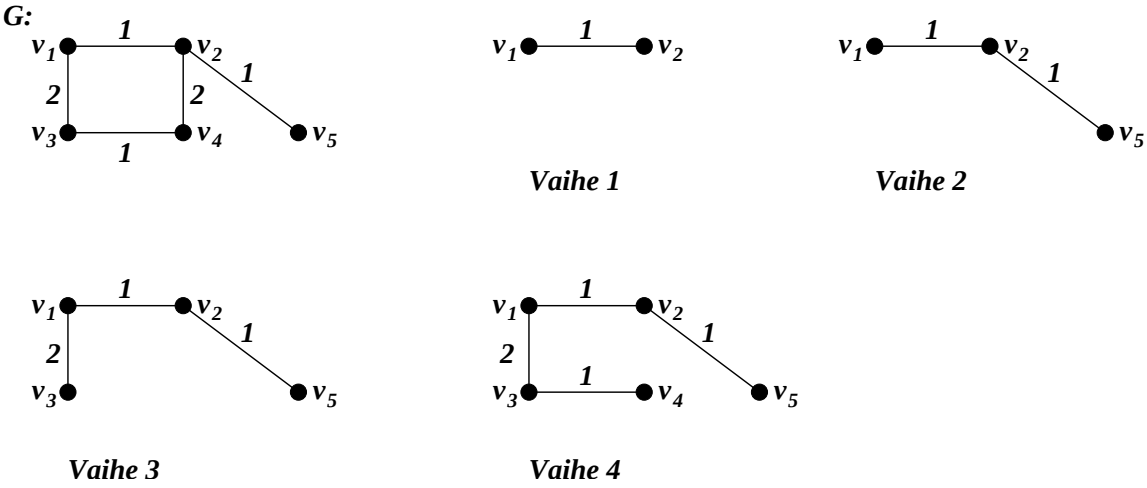
Minimaalisen virittävän puun konstruoimiseen on olemassa kaksi perusalgoritmia: *Primin algoritmi* ja *Kruskalin algoritmi*.

Minimaalisen virittävän puun konstruoimiseen on olemassa kaksi perusalgoritmia: *Primin algoritmi* ja *Kruskalin algoritmi*.

Algoritmi 3.4 (Primin algoritmi)

Primin algoritmilla minimaalinen virittävä puu muodostetaan seuraavasti.

1. Otetaan särmä, jonka paino on pienin ja joka ei ole luuppi.
2. Lisätään pienipainoisin särmä, joka on yhteydessä jo muodostettuun virittävän puun osaan ja joka ei synnytä silmukkaa.
3. Jatketaan menettelyä (kohta 2) kunnes särmiä on yksi vähemmän kuin alkuperäisen graafin solmuja.

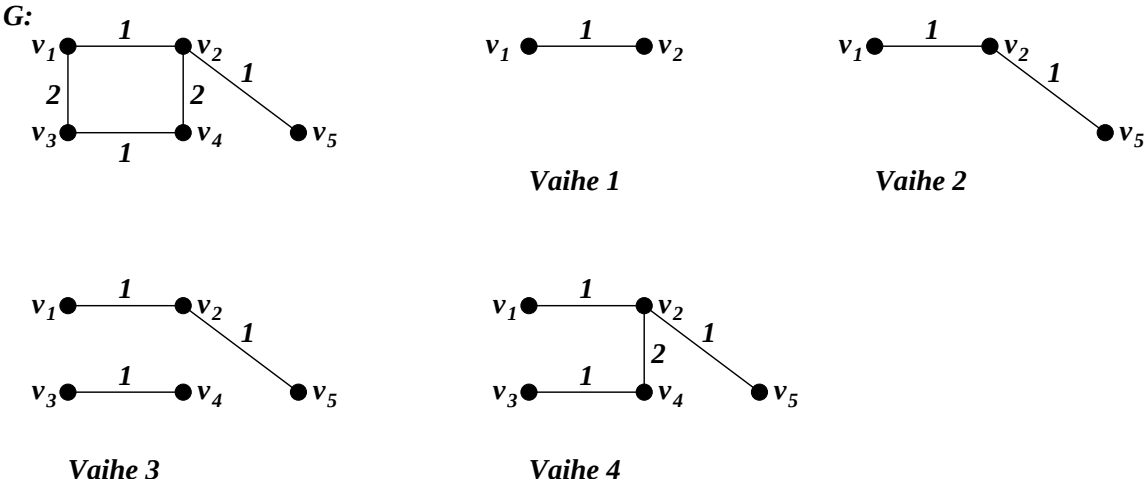


Kuva 3.9. Graafin G minimaalinen virittävä puu Primin algoritmilla.

Algoritmi 3.5 (Kruskalin algoritmi)

Kruskalin algoritmilla minimaalinen virittävä puu muodostetaan seuraavasti.

1. Otetaan särmä, jonka paino on pienin ja joka ei ole luuppi.
2. Lisätään pienipainoisin särmä, joka ei synnytä silmukkaa.
3. Jatketaan menettelyä (kohta 2) kunnes särmiä on yksi vähemmän kuin alkuperäisen graafin solmuja.



Kuva 3.10. Graafin G minimaalinen virittävä puu Kruskalin algoritmilla.

Seuraavaksi osoitamme, että jokainen pienipainoisin särmä kuuluu aina johonkin minimaaliseen virittävään puuhun.

Seuraavaksi osoitamme, että jokainen pienipainoisin särmä kuuluu aina johonkin minimaaliseen virittävään puuhun.

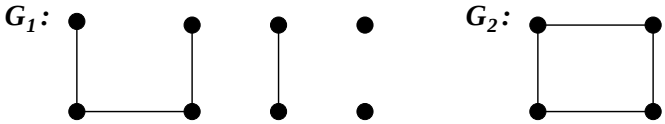
Lause 3.12
Jokainen pienipainoisin särmä, joka ei ole luuppi, kuuluu painotetun graafin johonkin minimaaliseen virittävään puuhun.

3.5 Metsä

Seuraavaksi määritellään (virittäviä) metsiä ja k-puita eli graafeja, joiden komponentit ovat puita.

Määritelmä 3.4

Metsä on suuntaamaton silmukaton graafi. Metsän aligraafi on metsän *alimetsä*. Jos metsä on graafin G aligraafi, kyseessä on graafin G alimetsä. Metsää, jossa on k komponenttia, kutsutaan k*-puuksi*.



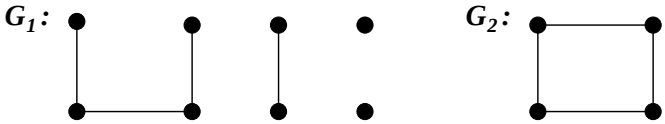
Kuva 3.11. Graafi G_1 on metsä, mutta graafi G_2 ei ole metsä.

3.5 Metsä

Seuraavaksi määritellään (virittäviä) metsiä ja k-puita eli graafeja, joiden komponentit ovat puita.

Määritelmä 3.4

Metsä on suuntaamaton silmukaton graafi. Metsän aligraafi on metsän *alimetsä*. Jos metsä on graafin G aligraafi, kyseessä on graafin G alimetsä. Metsää, jossa on k komponenttia, kutsutaan *k-puuksi*.

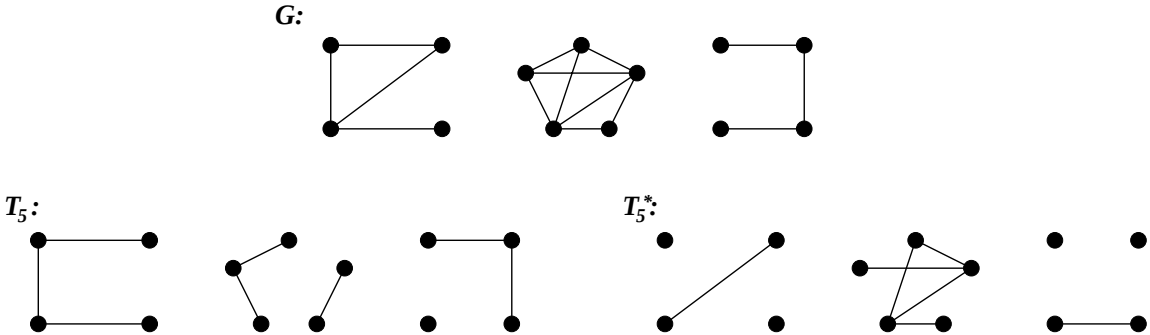


Kuva 3.11. Graafi G_1 on metsä, mutta graafi G_2 ei ole metsä.

Metsän komponentit ovat siis puita. Yhtenäinen metsä on puu, metsän yhtenäinen aligraafi on metsän alipuu ja 1-puu on puu.

Määritelmä 3.5

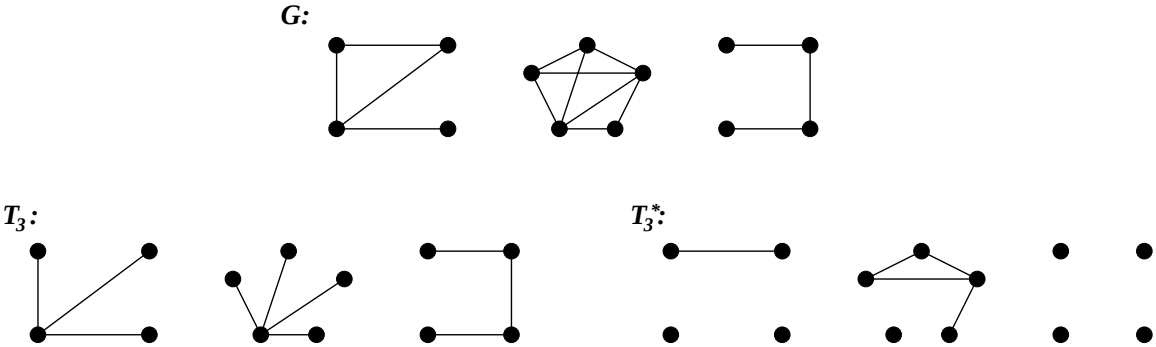
Graafin G *virittävä* k*-puu* on graafin G k-komponenttinen alimetsä, joka sisältää kaikki graafin G solmut. Jos $T = (V, E)$ on graafin G virittävä k-puu, niin $T^* = G - E$ on graafin G *virittävä* k*-vastapuu*.



Kuva 3.12a. Graafi G ja graafin G virittävä 5-puu T_5 ja sen virittävä 5-vastapuu T_5^*.

Määritelmä 3.6

Graafin G virittävä k-puu on graafin G *virittävä metsä*, jos k on graafin G komponenttien lukumäärä. Jos $T = (V, E)$ on graafin G virittävä metsä, niin $T^* = G - E$ on graafin G *virittävä vastametsä*.



Kuva 3.12b. Graafi G ja graafin G virittävä metsä T_3 ja sen virittävä vastametsä T_3^*.

Graafilla voi olla useita virittäviä k-puita ja virittäviä metsiä. Virittävä k-vastapuu (metsä) ei yleensä ole k-puu (metsä). Yhtenäisen graafin virittävä metsä on graafin virittävä puu.

Graafilla voi olla useita virittäviä k-puita ja virittäviä metsiä. Virittävä k-vastapuu (metsä) ei yleensä ole k-puu (metsä). Yhtenäisen graafin virittävä metsä on graafin virittävä puu.

Lause 3.13

Olkoon G jokin n-solmuinen m-särmäinen graafi ja T jokin graafin G virittävä k-puu. Tällöin k-puussa T on $n-k$ särmää ja virittävässä k-vastapuussa T^* on $m-n+k$ särmää.

Graafilla voi olla useita virittäviä k-puita ja virittäviä metsiä. Virittävä k-vastapuu (metsä) ei yleensä ole k-puu (metsä). Yhtenäisen graafin virittävä metsä on graafin virittävä puu.

Lause 3.13

Olkoon G jokin n-solmuinen m-särmäinen graafi ja T jokin graafin G virittävä k-puu. Tällöin k-puussa T on $n-k$ särmää ja virittävässä k-vastapuussa T^* on $m-n+k$ särmää.

Koska n-solmuisen, m-särmäisen ja k-komponenttisen graafin G aste on $n-k$ ja nulliteetti $m-n+k$, erikoistapaus lauseen 3.13 tuloksesta voidaan esittää myös graafin asteen $\rho(G)$ ja nulliteetin $\mu(G)$ avulla.

Graafilla voi olla useita virittäviä k-puita ja virittäviä metsiä. Virittävä k-vastapuu (metsä) ei yleensä ole k-puu (metsä). Yhtenäisen graafin virittävä metsä on graafin virittävä puu.

Lause 3.13

Olkoon G jokin n-solmuinen m-särmäinen graafi ja T jokin graafin G virittävä k-puu. Tällöin k-puussa T on $n-k$ särmää ja virittävässä k-vastapuussa T^* on $m-n+k$ särmää.

Koska n-solmuisen, m-särmäisen ja k-komponenttisen graafin G aste on $n-k$ ja nulliteetti $m-n+k$, erikoistapaus lauseen 3.13 tuloksesta voidaan esittää myös graafin asteen $\rho(G)$ ja nulliteetin $\mu(G)$ avulla.

Seuraus 3.14

Olkoon T jokin graafin G virittävä metsä ja T^* vastaava virittävä vastametsä. Tällöin metsässä T on $\rho(G)$ särmää ja vastametsässä T^* on $\mu(G)$ särmää.

Lause 3.15

Olkoon G graafi, jossa on n solmua ja p komponenttia. Tällöin graafilla G on virittävä k-puu täsmälleen silloin, kun $p \leq k \leq n$.

Lause 3.15

Olkoon G graafi, jossa on n solmua ja p komponenttia. Tällöin graafilla G on virittävä k-puu täsmälleen silloin, kun $p \leq k \leq n$.

Seuraus 3.16

Graafilla on aina virittävä metsä.

3.6 Silmukka ja irrotusjoukko

Seuraavaksi tarkastelemme silmukoiden ja irrotusjoukkojen suhdetta virittäviin puihin ja vastapuihin.

3.6 Silmukka ja irrotusjoukko

Seuraavaksi tarkastelemme silmukoiden ja irrotusjoukkojen suhdetta virittäviin puihin ja vastapuihin.

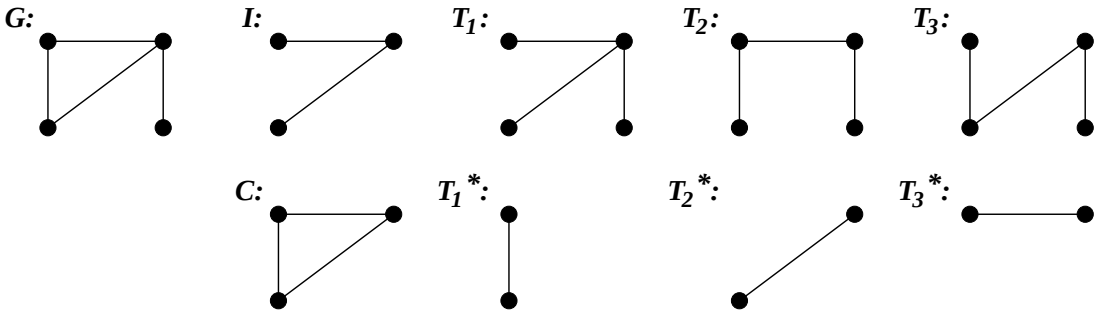
Lause 3.17
Yhtenäisen graafin G irrotusjoukko sisältää ainakin yhden särmän jokaisesta graafin G virittävästä puusta.

3.6 Silmukka ja irrotusjoukko

Seuraavaksi tarkastelemme silmukoiden ja irrotusjoukkojen suhdetta virittäviin puihin ja vastapuihin.

Lause 3.17
Yhtenäisen graafin G irrotusjoukko sisältää ainakin yhden särmän jokaisesta graafin G virittävästä puusta.

Lause 3.18
Yhtenäisen graafin G silmukka sisältää ainakin yhden särmän jokaisesta graafin G virittävästä vastapuusta.



Kuva 3.13. Silmukka C sisältää särmän jokaisesta graafin G virittävästä vastapuusta, ja irrotusjoukko I särmän jokaisesta virittävästä puusta.

Lause 3.19

Yhtenäisen graafin G särmäjoukko I on graafin G irrotusjoukko täsmälleen silloin, kun I on minimaalinen joukko, joka sisältää särmän jokaisesta graafin G virittävästä puusta.

Lause 3.19

Yhtenäisen graafin G särmäjoukko I on graafin G irrotusjoukko täsmälleen silloin, kun I on minimaalinen joukko, joka sisältää särmän jokaisesta graafin G virittävästä puusta.

Lause 3.20

Yhtenäisen graafin G aligraafi C on graafin G silmukka täsmälleen silloin, kun C on minimaalinen graafi, joka sisältää särmän graafin G jokaisesta virittävästä vastapuusta.

Lause 3.19

Yhtenäisen graafin G särmäjoukko I on graafin G irrotusjoukko täsmälleen silloin, kun I on minimaalinen joukko, joka sisältää särmän jokaisesta graafin G virittävästä puusta.

Lause 3.20

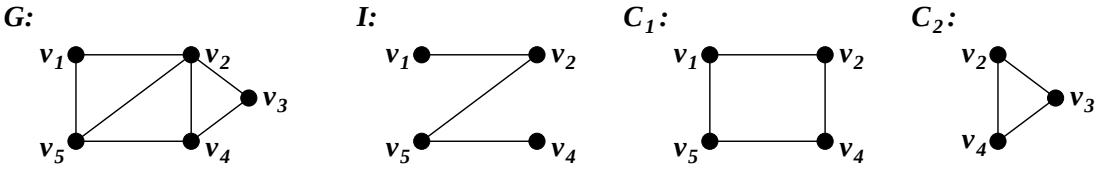
Yhtenäisen graafin G aligraafi C on graafin G silmukka täsmälleen silloin, kun C on minimaalinen graafi, joka sisältää särmän graafin G jokaisesta virittävästä vastapuusta.

Lause 3.21

Yhtenäisen graafin silmukalla ja irrotusjoukolla on aina parillinen määrä yhteisiä särmiä.

Esimerkki 3.3

Kuvan 3.14 graafin G irrotusjoukolla I on silmukan C_1 kanssa kaksi yhteistä särmää ja silmukan C_2 kanssa nolla yhteistä särmää.



Kuva 3.14. Graafi, sen irrotusjoukko ja kaksi silmukkaa.

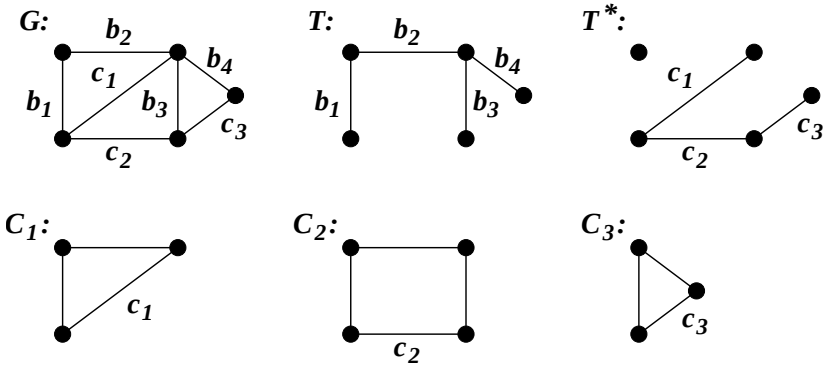
3.7 Perussilmukka ja perusirrotusjoukko

Graafin virittävien puiden ja -vastapuiden avulla voidaan muodostaa graafin irrotusjoukkoja ja silmukoita. Seuraava tulos seuraa suoraan lauseesta 3.6.

Lause 3.22
Olkoon $G = (V, E)$ yhtenäinen graafi ja $T = (V, F)$ jokin graafin G virittävä puu sekä T^* vastaava virittävä vastapuu. Jos c on virittävän vastapuun T^* särmä, niin graafissa $(V, F \cup \{c\})$ on täsmälleen yksi silmukka.

Määritelmä 3.7

Olkoon $G = (V, E)$ yhtenäinen graafi, $T = (V, F)$ jokin graafin G virittävä puu ja $c \in E \setminus F$. Tällöin graafin $(V, F \cup \{c\})$ ainoaa silmukkaa sanotaan graafin G särmää c vastaavaksi *perussilmukaksi* puun T suhteen.



Kuva 3.15a. Graafin G perussilmukat puun T suhteen.

Määritelmä 3.8

Olkoon G jokin n-solmuinen ja m-särmäinen yhtenäinen graafi, T graafin G jokin virittävä puu ja T^* puuta T vastaava virittävä vastapuu. Olkoot edelleen $c_1, c_2, \ldots, c_{m-n+1}$ virittävän vastapuun T^* särmät ja $C_1, C_2, \ldots, C_{m-n+1}$ näitä särmiä vastaavat perussilmukat. Tällöin joukkoa $\{C_1, C_2, \ldots, C_{m-n+1}\}$ sanotaan graafin G *perussilmukkajoukoksi* puun T suhteen.

Määritelmä 3.8

Olkoon G jokin n-solmuinen ja m-särmäinen yhtenäinen graafi, T graafin G jokin virittävä puu ja T^* puuta T vastaava virittävä vastapuu. Olkoot edelleen $c_1, c_2, \ldots, c_{m-n+1}$ virittävän vastapuun T^* särmät ja $C_1, C_2, \ldots, C_{m-n+1}$ näitä särmiä vastaavat perussilmukat. Tällöin joukkoa $\{C_1, C_2, \ldots, C_{m-n+1}\}$ sanotaan graafin G *perussilmukkajoukoksi* puun T suhteen.

Puun perusominaisuuksiin nojautuen on helppo osoittaa, että jos b on puun T särmä, niin graafissa $T - b$ on täsmälleen kaksi komponenttia.

Määritelmä 3.8

Olkoon G jokin n-solmuinen ja m-särmäinen yhtenäinen graafi, T graafin G jokin virittävä puu ja T^* puuta T vastaava virittävä vastapuu. Olkoot edelleen $c_1, c_2, \ldots, c_{m-n+1}$ virittävän vastapuun T^* särmät ja $C_1, C_2, \ldots, C_{m-n+1}$ näitä särmiä vastaavat perussilmukat. Tällöin joukkoa $\{C_1, C_2, \ldots, C_{m-n+1}\}$ sanotaan graafin G *perussilmukkajoukoksi* puun T suhteen.

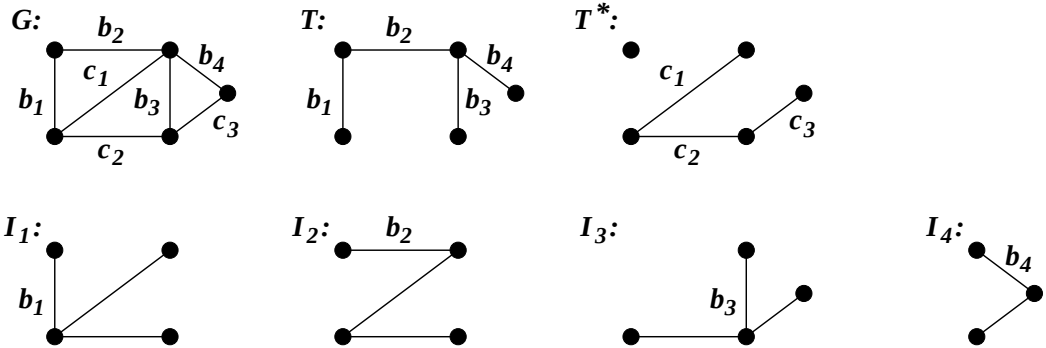
Puun perusominaisuuksiin nojautuen on helppo osoittaa, että jos b on puun T särmä, niin graafissa $T - b$ on täsmälleen kaksi komponenttia.

Lause 3.23

Olkoon G yhtenäinen graafi, T jokin graafin G virittävä puu ja b jokin virittävän puun T särmä. Olkoot edelleen $T_1 = (V_1, E_1)$ ja $T_2 = (V_2, E_2)$ graafin $T - b$ komponentit. Tällöin irrotus $\langle V_1, V_2 \rangle$ on graafin G irrotusjoukko.

Määritelmä 3.9

Olkoon G yhtenäinen graafi, T jokin graafin G virittävä puu ja b virittävän puun T särmä. Olkoot edelleen $T_1 = (V_1, E_1)$ ja $T_2 = (V_2, E_2)$ graafin $T - b$ komponentit. Tällöin irrotusjoukkoa $\langle V_1, V_2 \rangle$ sanotaan graafin G särmää b vastaavaksi *perusirrotusjoukoksi* puun T suhteen.



Kuva 3.15b. Graafin G perusirrotusjoukot puun T suhteen.

Määritelmä 3.10

Olkoot b_1, b_2, $\ldots$, b_{n-1} jonkin n-solmuisen yhtenäisen graafin G virittävän puun T oksat ja olkoot I_1, I_2, $\ldots$, I_{n-1} näitä oksia vastaavat perusirrotusjoukot puun T suhteen. Tällöin joukkoa $\{I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}\}$ sanotaan graafin G *perusirrotusjoukkojen joukoksi* puun T suhteen.

Määritelmä 3.10

Olkoot $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ jonkin n-solmuisen yhtenäisen graafin G virittävän puun T oksat ja olkoot $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$ näitä oksia vastaavat perusirrotusjoukot puun T suhteen. Tällöin joukkoa $\{I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}\}$ sanotaan graafin G *perusirrotusjoukkojen joukoksi* puun T suhteen.

Koska yhtenäisen n-solmuisen ja m-särmäisen graafin jokaisessa virittävässä puussa on $n-1$ särmää ja jokaisessa virittävässä vastapuussa on $m-n+1$ särmää, niin perussilmukoita on $m-n+1$ kappaletta ja perusirrotusjoukkoja on $n-1$ kappaletta.

Perussilmukat muodostetaan lisäämällä virittävään puuhun T vuorotellen kaikki virittävän vastapuun särmät ja etsimällä muodostuneet silmukat. Perusirrotusjoukot taas muodostetaan poistamalla virittävästä puusta vuorotellen kaikki särmät ja etsimällä muodostuneita kahta solmujoukkoa vastaavat irrotusjoukot.

Kukin perussilmukka C_i sisältää virittävästä vastapuusta T^* täsmälleen yhden särmän c_i, joka ei esiinny missään muussa perusssilmukkajoukon silmukassa. Samoin kukin virittävän puun T särmä b_i kuuluu täsmälleen yhteen perusirrotusjoukkojen joukon irrotusjoukkoon I_i.

Kukin perussilmukka C_i sisältää virittävästä vastapuusta T^* täsmälleen yhden särmän c_i, joka ei esiinny missään muussa perusssilmukkajoukon silmukassa. Samoin kukin virittävän puun T särmä b_i kuuluu täsmälleen yhteen perusirrotusjoukkojen joukon irrotusjoukkoon I_i.

Lause 3.24

Yhtenäisen graafin G virittävän vastapuun T^* särmää c vastaava perussilmukka (virittävän puun T suhteen) sisältää täsmälleen ne puun T särmät, joita vastaavat perusirrotusjoukot (puun T suhteen) sisältävät särmän c.

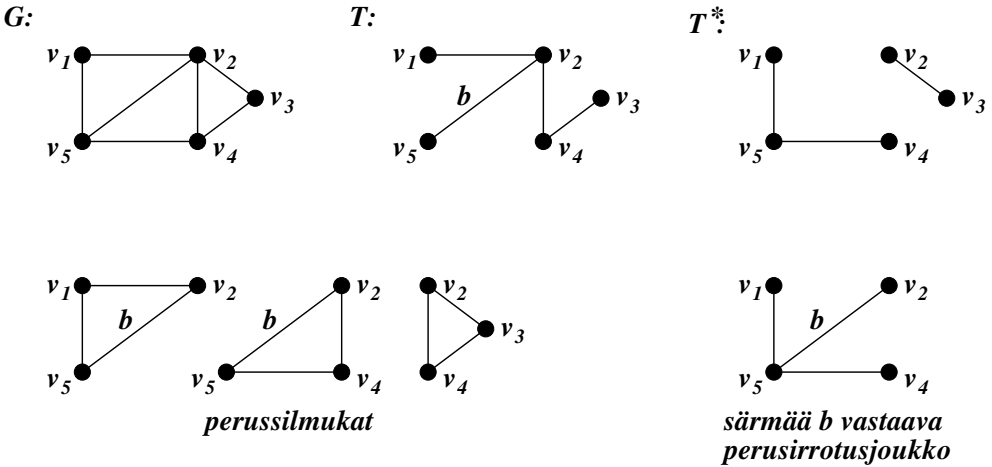
Kukin perussilmukka C_i sisältää virittävästä vastapuusta T^* täsmälleen yhden särmän c_i, joka ei esiinny missään muussa perusssilmukkajoukon silmukassa. Samoin kukin virittävän puun T särmä b_i kuuluu täsmälleen yhteen perusirrotusjoukkojen joukon irrotusjoukkoon I_i.

Lause 3.24

Yhtenäisen graafin G virittävän vastapuun T^* särmää c vastaava perussilmukka (virittävän puun T suhteen) sisältää täsmälleen ne puun T särmät, joita vastaavat perusirrotusjoukot (puun T suhteen) sisältävät särmän c.

Lause 3.25

Yhtenäisen graafin G virittävän puun T särmää b vastaava perusirrotusjoukko (virittävän puun T suhteen) sisältää täsmälleen ne vastapuun T^* särmät, joita vastaavat perussilmukat (puun T suhteen) sisältävät särmän b.



Kuva 3.16. Särmää b vastaava perusirrotusjoukko sisältää ne vastapuun T^* särmät, joita vastaavat perussilmukat sisältävät särmän b.