Differenssiyhtälöt 2020, viikko 18, 29.4.2020,
harjoitus 7

Huom. Tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä, vaan ne noudattavat monisteen järjestystä.

1. Todista täsmällisesti O-symbolin määritelmän perusteella, että $2n^2 + 5n = O(n^2)$. (Luku 3.1.1)
2. Todista täsmällisesti O-symbolin määritelmän perusteella, että $n^2 \neq O(n)$. (Luku 3.1.1)
3. Onko oikein:
   i) $\log_a n = O(\log_b n)$ aina, kun $a, b > 1$,
   ii) $a^n = O(b^n)$ aina, kun $a, b > 1$.
   Lyhyt perustelu riittää. Kun väite on väärin, riittää vastaesimerkki. (Luku 3.1.2/3)
4. Onko oikein:
   i) $\exists a > 0 : n^a = O(\log n)$,
   ii) $\forall a > 0 : \log n = O(n^a)$.
   Lyhyt perustelu riittää. (Luku 3.1.2/3)
5. Todista lause 3.1.3, kaava (3.1). (Luku 3.1.4)
6. Konstruoitava sellaiset funktiot $f, g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$, että
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$
   ei ole olemassa (äärellisenä tai äärettömänä) ja
   a) $f(n) = O(g(n))$,
   b) $f(n) \neq O(g(n))$.
   Ei vaadita täsmällistä perustelua. (Luku 3.1)
7. Onko oikein:
   i) $\log_a n = o(\log_b n)$ aina, kun $a, b > 1$,
   ii) $a^n = o(b^n)$ aina, kun $1 < a < b$,
   iii) Jos $f(n) = o(g(n))$, niin $f(n) - 100 = o(g(n))$.
   Lyhyt perustelu riittää. Huom: Kyseessä on pikku-o (luku 3.1.5)
8. Todista logaritmin ominaisuuksien perusteella, että
   $$a^{\log_b n} = n^{\log_b a}.$$
   (Tätä käytetään aputuloksena luvussa 3.2, ks. esimerkki 3.2.4.)
9. Oletetaan, että algoritmin kompleksisuus $f(n)$ toteuttaa yhtälön
   $$f(n) = f(n/4) + 4.$$
   a) Laskettava $f(4^k)$, $k = 1, 2, \ldots$
   b) Arvioitava funktion f kertaluokkaa, kun f on kasvava.
   (Luku 3.2)
10. Oletetaan, että algoritmin kompleksisuus $f(n)$ toteuttaa yhtälön
    $$f(n) = 2f(n/4) + 5.$$
    a) Laskettava $f(4^k)$, $k = 1, 2, \ldots$
    b) Arvioitava funktion f kertaluokkaa, kun f on kasvava.
    (Luku 3.2)