

**Differenssiyhtälöt 2020, viikko 17, 22.4.2020,
harjoitus 6**

1. a) Esitä Fibonaccin lukujonon differenssiyhtälö

$$F_{k+2} - F_{k+1} - F_k = 0$$

matriisimuodossa (ks. huomautus 2.9.1).

- b) Mikä on matriisin karakteristinen yhtälö ja mitkä ovat matriisin ominaisarvot?

2. Etsi differenssiyhtälön

$$y_{k+4} - 9y_{k+3} + 17y_{k+2} + 33y_{k+1} - 90y_k = 0$$

karakteristisen polynomin juuret ja niiden kertaluvut. (Sovella jotakin matemaattista ohjelmistoa, esim. WolframAlphaa, joka toimii netissä. Siellä r^n kirjoitetaan r^n .) Määritä ratkaisuavaruuden kanta. (Luku 2.9.)

3. a) Määritä lukujonon $(y_k)_{k=0}^{\infty} = (1, -2, 1, 0, 0, \dots)$ generoiva funktio. (Luku 2.11.)

- b) Määritä jonon $(y_k)_{k=0}^{\infty}$, jossa $y_k = 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), käänteisjono Cauchyn kertolaskun suhteen generoivan funktion avulla. (Luku 2.11.)

4. Määritä Lucas'n lukujonon (L_k) generoiva funktio suljetussa muodossa, kun

$$L_k = L_{k-1} + L_{k-2} \quad (k \geq 2), \quad L_0 = 2, L_1 = 1.$$

(Luku 2.11.)

5. Ratkaise alkuarvot tehtävä

$$y_k - 5y_{k-1} + 6y_{k-2} = 0 \quad (k \geq 2), \quad y_0 = 0, y_1 = 1,$$

generoivan funktion menetelmällä. (Luku 2.11.)

6. Ratkaise edellinen tehtävä karakteristisen yhtälön menetelmällä. (Luku 2.7.)

7. Todista induktiolla muuttujan k suhteen, että funktio $S_k = (1+r)^k A$ toteuttaa esimerkin 2.13.4 differenssiyhtälön.

8. Kuinka paljon on sellaisia n bitin jonoja, joissa ei ole 2 peräkkäistä nollaa? Vihje: Tämä on ns. kombinatorinen ongelma. Apua löytyy kombinatoriikan monisteen luvusta 6.3 (ks. kurssisivu).

9. Olkoon A_k sellainen $k \times k$ -matriisi, että sen kaikki diagonaali-alkiot ovat $= 1$ ja $a_{i,i+1} = 1$, $a_{i+1,i} = -1$, kun $i = 1, 2, \dots, k-1$, sekä $a_{ij} = 0$ muulloin. Olkoon $d_k = \det(A_k)$. Minkä 2. kertaluvun lineaarisen differenssiyhtälön d_k ($k = 1, 2, \dots$) toteuttaa? (Alkuehtoina ovat $d_1 = 1, d_2 = 2$. Matriisi A_k on esimerkki ns. tridiagonaalimatriisista. Ks. esimerkki 2.13.10.)