**Differenssiyhtälöt 2020, viikko 16, 15.4.2020,**
**harjoitus 5**

Huom: Vastauksia ei tarvitse todistaa induktiolla (ellei toisin pyydetä).

1. Ratkaise esimerkin 2.6.5 differenssiyhtälö "menetelmällä I", vrt. esim. 2.6.2.
2. Ratkaise differenssiyhtälö
$$y_{k+1}^2 = y_k,\ y_k > 0.$$
Vihje: Ota puolittain logaritmit. (Luku 2.6.)
3. Lucas'n luvut $L_k$ ovat Fibonaccin lukujen variaatio. Ne toteuttavat differenssiyhtälön
$$L_{k+2} = L_{k+1} + L_k, \quad L_0 = 2, L_1 = 1.$$
Ratkaise tämä differenssiyhtälö, ts. esitä Lucas'n luvut suljetussa muodossa. (Luku 2.7.)
Huom. Alkuperäisissä tehtävissä alkuehdot olivat vahingossa toisinpäin. Jos olet ehtinyt ratkaista tehtävän niillä, ei tarvitse laatia uutta ratkaisua.
4. Ratkaise differenssiyhtälö
$$y_{k+2} + y_k = 0.$$
Määritä ratkaisuavaruuden kanta ja dimensio. (Luku 2.7.)
5. Ratkaise differenssiyhtälö
$$y_{k+2} - 4y_{k+1} + 3y_k = 0.$$
Määritä ratkaisuavaruuden kanta ja dimensio. (Luku 2.7.)
6. Ratkaise differenssiyhtälö
$$y_{k+2} - 4y_{k+1} + 3y_k = 3 \cdot 4^k.$$
Etsi yksityisratkaisu vakioiden varioinnilla. (Luku 2.8.)
7. Ratkaise differenssiyhtälö
$$y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 3k.$$
Määritä homogeenisen yhtälön ratkaisuavaruuden kanta ja dimensio. (Luku 2.8.)
8. Oletetaan, että differenssiyhtälön
$$y_{k+2} + py_{k+1} + qy_k = 0\ (q \neq 0), \quad k = 0, 1, \ldots,$$
karakteristisella yhtälöllä on yksi kaksinkertainen juuri $r \in \mathbb{R}$. Todista, että differenssiyhtälön ratkaisu on
$$y_k = C_1 r^k + C_2 k r^k$$
ts. $\{r^k, kr^k\}$ on ratkaisuavaruuden kanta. (Luku 2.7, menetelmän todistus.)
9. Oletetaan, että $u_k$ ja $v_k$ toteuttavat saman toisen kertaluvun lineaarisen homogeenisen differenssiyhtälön. Tutkittava, toteuttaako funktioiden $u_k$ ja $v_k$ Casoratin determinantti $D(k)$ jonkin ensimmäisen kertaluvun lineaarisen homogeenisen differenssiyhtälön? Myönteisessä tapauksessa ilmoita ko. differenssiyhtälö.