Harjoitus 7.

Tehtävä 1.

Väite: $2n^2 + 5n = O(n^2)$.

Todistus: Nyt $2n^2+5n \leq 2n^2+5n^2 = 7n^2$, joten valitsemalla $C=7$ ja $N=1$ nähdään, että mielivaltaisella $n \geq 1 = N$: $2n^2+5n \leq 7n^2 = Cn^2$. Täten määritelmän 3.1.1. nojalla $2n^2+5n = O(n^2)$

Tehtävä 2.

Väite: $n^2 \neq O(n)$

Todistus: Tehdään vastaoletus, että $n^2 = O(n)$. Tällöin määritelmän 3.1.1. nojalla on olemassa $C, N \in \mathbb{Z}^+$ s.e. jokaisella $n > N$ pätee, että $n^2 \leq Cn$. Jakamalla tämä epäyhtälö luvulla $n\ (>N>0)$ saadaan, että on olem. $C, N \in \mathbb{Z}^+$ s.e. $n \leq C$ jokaisella $n > N$. Kuitenkin, kun vaikka $n = C+N$, niin $n > N$, mutta $n = C+N > C$, mikä on ristiriitaista, joten vastaoletus on väärin, eli $n^2 \neq O(n)$.

Tehtävä 3

i) Väite: Olk. $a, b > 1$. Tällöin $\log_a n = O(\log_b n)$.

Todistus: Nyt

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}\log_b n \leq \left\lceil \frac{1}{\log_b a} \right\rceil \log_b n \text{, missä}$$

$\lceil \ldots \rceil$ on kattofunktio. Täten valitsemalla $C = \left\lceil \frac{1}{\log_b a} \right\rceil$ ja $N = 1$ saadaan, että $\log_a n \leq C \log_b n$ aina, kun $n > N$. Täten $\log_a n = O(\log_b n)$, kun $a, b > 1$. (Myös $\lim_{n \to \infty} \frac{\log_a n}{\log_b n} = \frac{1}{\log_b a}$ ja Lause 3.1.1.a))

ii) Väite: Olk. $a, b > 1$. Tällöin $a^n = O(b^n)$, jos $a \leq b$ ja $a^n \neq O(b^n)$, jos $a > b$.

Todistus: Nyt

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \to 0$, kun $n \to \infty$ ja $a \leq b$, sekä

$\left(\frac{a}{b}\right)^n \to \infty$, kun $n \to \infty$ ja $a > b$.

Täten lauseen 3.1.1. nojalla $a^n = O(b^n)$, kun $a \leq b$ ja $a^n \neq O(b^n)$, kun $a > b$.

Siis $a^n = O(b^n)$ ei ole oikein aina, kun $a, b > 1$.

Tehtävä ④ i) Onko oikein: $\exists a>0 : n^a = O(\log n)$?

Ei ole, sillä L'Hospitalin $\frac{\infty}{\infty}$ - säännön nojalla

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{\log x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^{a-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} ax^a = \infty, \text{ kun } a>0.$$

Täten huomautuksen 3.1.2. ja lauseen 3.1.1.b) perusteella $n^a \neq O(\log n)$, kun $a>0$.

ii) Väite: $\forall a>0 : \log n = O(n^a)$.

Todistus: Olk. nyt $a>0$. Tällöin L'Hospitalin $\frac{\infty}{\infty}$ - säännön nojalla

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^a} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{ax^a} = 0.$$

Täten huomautuksen 3.1.2. ja lauseen 3.1.1.a) perusteella $\log n = O(n^a)$, kun $a>0$. Edelleen, koska a oli mielivaltainen, niin $\log n = O(n^a)$ pätee jokaisella $a>0$.

Tehtävä 5. Olk. $f_1(n) = O(g_1(n))$ ja $f_2(n) = O(g_2(n))$

Väite: Tällöin $f_1(n) + f_2(n) = O(\max(|g_1(n)|, |g_2(n)|))$.

Todistus: Oletuksien nojalla nyt

$$\exists C_1, N_1 : \forall n > N_1 : |f_1(n)| \leq C_1 |g_1(n)| \text{ ja}$$

$$\exists C_2, N_2 : \forall n > N_2 : |f_2(n)| \leq C_2 |g_2(n)|.$$

Kun $n > \max(N_1, N_2)$, niin

$$\begin{aligned}|f_1(n) + f_2(n)| &\overset{\Delta\text{-ey}}{\leq} |f_1(n)| + |f_2(n)| \\ &\leq C_1|g_1(n)| + C_2|g_2(n)| \\ &\leq 2 \cdot \max(C_1, C_2) \cdot \max(|g_1(n)|, |g_2(n)|).\end{aligned}$$

Merkitään $C = 2 \cdot \max(C_1, C_2)$ ja $N = \max(N_1, N_2)$.

Tällöin $\forall n > N : |f_1(n) + f_2(n)| \leq C \max(|g_1(n)|, |g_2(n)|)$

eli $f_1(n) + f_2(n) = O(\max(|g_1(n), g_2(n)|))$.

Tehtävä 6. Konstruoitava sellaiset $f, g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$, että $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ ei ole olemassa ja

a) $f(n) = O(g(n))$.

Olk. nyt $f(n) = \sin(n) + 2$ ja $g(n) = 1$. Tällöin $|\sin(n) + 2| \leq |\sin(n)| + 2 \leq 1 + 3 = 4 = 4 \cdot |1|$ aina, kun $n \geq 1$, joten $\sin(n) + 2 = O(1)$. Kuitenkin $\lim_{n \to \infty} \frac{\sin(n) + 2}{1}$ ei ole olemassa.

b) $f(n) \neq O(g(n))$.

Olk. nyt $f(n) = n|\sin(n)|$ ja $g(n) = 1$. Tällöin jos olisi olemassa $C, N \in \mathbb{Z}^+$ s.e. $n|\sin(n)| \leq C$ aina, kun $n > N$, niin olisi $n \leq C$, mikä on ristiriitaista, sillä esim. jos $n = N + C > N$, niin $n = N + C > C$. Täten $n|\sin(n)| \neq O(1)$. Kuitenkin $\lim_{n \to \infty} \frac{n|\sin(n)|}{1}$ ei ole olemassa.

Tehtävä 7. Onko oikein:

i) $\log_a n = o(\log_b n)$ aina, kun $a, b > 1$?

Ei ole oikein, sillä $\log_b n > 0$ aina, kun $n > 1$ ja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{\log_b n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{\frac{\log_a n}{\log_a b}} = \lim_{n\to\infty} \log_a b = \log_a b \neq 0, \text{ aina,}$$

kun $a, b > 1$. Täten huomautuksen 3.1.4. nojalla $\log_a n \neq o(\log_b n)$.

ii) $a^n = o(b^n)$ aina, kun $1 < a < b$?

On oikein, sillä $b^n > 0$ aina, kun $n \in \mathbb{Z}^+$ ja $b > 1$, sekä $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{b^n} = \lim_{n\to\infty} \Big(\underbrace{\frac{a}{b}}_{<1}\Big)^n = 0$. Täten huomautuksen 3.1.4. nojalla $a^n = o(b^n)$ aina, kun $1 < a < b$.

iii) Jos $f(n) = o(g(n))$, niin $f(n) - 100 = o(g(n))$?

Ei ole oikein, sillä jos esim. $f(n) = 0$ ja $g(n) = 1$, niin $f(n) = 0 = o(1) = o(g(n))$, koska $\lim_{n\to\infty} \frac{0}{1} = 0$. Kuitenkin $\lim_{n\to\infty} \frac{0-100}{1} = -100 \neq 0$, joten $f(n) - 100 \neq o(g(n))$.

Tehtävä 8. Väite: $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$.

Todistus: Nyt

$$a^{\log_b n} = b^{\log_b(a^{\log_b n})} = b^{\log_b n \cdot \log_b a} = (\underbrace{b^{\log_b n}}_{=n})^{\log_b a}$$

$$= n^{\log_b a}.$$

Tehtävä 9. Olet., että algoritmin kompleksisuus $f(n)$ toteuttaa yhtälön $f(n) = f(n/4) + 4$.

a) Laskettava $f(4^k)$, $k = 1, 2, \dots$

Nyt $\underline{f(4^k)} = f(4^k/4) + 4 = f(4^{k-1}) + 4$

$= (f(4^{k-2}) + 4) + 4 = f(4^{k-2}) + 2 \cdot 4$

$= \dots$

$= f(4^{k-k}) + k \cdot 4$

$= \underline{4k + f(1)}.$

b) Arvioitava f:n kertaluokkaa, kun f on kasvava.

Olk. nyt $n \in \mathbb{Z}^+$. Tällöin on olem. $k \in \mathbb{Z}^+$ s.e. $4^{k-1} \leq n < 4^k$. Nyt, koska f on kasvava, niin $f(1) \leq f(n) \leq f(4^k) = 4k + f(1)$. Edelleen, koska $4^{k-1} \leq n$, niin $k \leq \log_4 n + 1$. Täten $f(1) \leq f(n) \leq 4k + f(1) \leq 4 \log_4 n + 4 + f(1)$. Nyt siis, koska $\log_4 n = \frac{\log n}{\log 4} = C \log n$, ja $f(1) \in \mathbb{R}$, niin

$\underline{f(n) = O(\log n)}.$

Tehtävä (10) Olet., että algoritmin kompleksisuus toteuttaa yhtälön $f(n)=2f(n/4)+5$.

a) Laskettava $f(4^k)$, $k=1,2,\ldots$

Nyt
$$\begin{aligned} f(4^k) &= 2f(4^{k-1})+5 \\ &= 2(2f(4^{k-2})+5)+5 = 2^2 f(4^{k-2}) + 2\cdot 5+5 \\ &= \ldots \\ &= 2^k f(1) + 2^{k-1}\cdot 3 + 2^{k-2}\cdot 5 + \ldots + 2\cdot 5 + 5 \\ &= 2^k f(1) + \frac{2^k-1}{2-1}\cdot 5 \\ &= 2^k f(1) + 2^k\cdot 5 - 5 \\ &= \underline{(f(1)+5)2^k - 5}. \end{aligned}$$

b) Arvioitava funktion f kertaluokkaa, kun f kasvava.

Olk. $n \in \mathbb{Z}^+$. Tällöin on olem. $k \in \mathbb{Z}^+$ s.e. $4^{k-1} \leq n \leq 4^k$. Täten myös $k \leq 1 + \log_4 n$. Näin ollen, koska f on kasvava, saadaan

$$\begin{aligned} f(1) \leq f(n) \leq f(4^k) &= (f(1)+5)2^k - 5 \leq (f(1)+5)2^k \\ &\leq (f(1)+5)2^{1+\log_4 n} = 2(f(1)+5)2^{\log_4 n}. \end{aligned}$$

T8 nojalla $2^{\log_4 n} = n^{\log_4 2}$, joten $f(1) \leq f(n) \leq C n^{\log_4 2}$. Täten $\underline{f(n) = O(n^{\log_4 2})}$.