Harjoitus 6.

Tehtävä 1. a) Esitettävä Fibonaccin lukujonon differenssiyhtälö $F_{k+2}-F_{k+1}-F_k=0$ matriisimuodossa. Huomautuksen 2.9.1. mukaisesti $F_{k+2}-F_{k+1}-F_k=0$ voidaan palauttaa 1. kertaluvun matriisidifferenssiyhtälöksi $Y_{k+1}=AY_k$, $k\in\mathbb{Z}_0^+$, missä nyt
$$Y_k=\begin{pmatrix}F_k\\F_{k+1}\end{pmatrix} \text{ ja } A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

Siis
$$Y_{k+1}=\begin{pmatrix}F_{k+1}\\F_{k+2}\end{pmatrix}=AY_k=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_k\\F_{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_{k+1}\\F_k+F_{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_{k+1}\\F_{k+2}\end{pmatrix}.$$

b) Matriisin A karakteristinen polynomi on
$$\det(\lambda I-A)=\det\left(\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\right)$$
$$=\begin{vmatrix}\lambda&-1\\-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)-1=\lambda^2-\lambda-1.$$

Karakteristinen yhtälö on siis $\underline{\lambda^2-\lambda-1=0}$.

Täten matriisin ominaisarvot ovat
$$\lambda=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \text{ eli } \underline{\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \text{ ja } \underline{\lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}}.$$

Tehtävä 2. Differenssiyhtälön

$y_{k+4} - 9y_{k+3} + 17y_{k+2} + 33y_{k+1} - 90y_k = 0$ karakteristisen polynomin $r^4 - 9r^3 + 17r^2 + 33r - 90$ juuret saadaan esim. Wolfram Alphalla komennolla:

roots r^4 - 9*r^3 + 17*r^2 + 33*r - 90 ,

mikä antaa kaksinkertaisen juuren $r=3$ ja yksinkertaiset juuret $r=-2$ sekä $r=5$.

Tällöin eräs ratkaisuavaruuden kanta on $\{3^k, k3^k, (-2)^k, 5^k\}$, sillä ratkaisu on nyt muotoa $y_k = C_1\phi_k^{(1)} + C_2\phi_k^{(2)} + C_3\phi_k^{(3)} + C_4\phi_k^{(4)}$, missä $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$ ja koska kaikki juuret ovat reaalisia niin $\phi_k^{(1)} = k^{1-1}3^k$, $\phi_k^{(2)} = k^{2-1}3^k$, $\phi_k^{(3)} = k^{1-1}(-2)^k = (-2)^k$ ja $\phi_k^{(4)} = k^{1-1}5^k = 5^k$.

Tehtävä 3. a) Lukujonon $(y_k)_{k=0}^{\infty}$ generoiva funktio on $G(y_k)(s) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k s^k$, joten kun $(y_k)_{k=0}^{\infty} = (1, -2, 1, 0, 0, \ldots)$, niin generoiva funktio on $1 \cdot s^0 + (-2) \cdot s^1 + 1 \cdot s^2 + 0 \cdot s^3 + 0 \cdot s^4 + \ldots$
$= \underline{1 - 2s + s^2}$.

b) Määritettävä jonon $(y_k)_{k=0}^{\infty} = (1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$ käänteisjono Cauchyn kertolaskun suhteen. Jonon generoiva funktio on nyt

$$G(y_k)(s) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k s^k = 1 + s + s^2 + s^3 + \ldots = \frac{1}{1-s}.$$

Täten, koska $G(y_k)(s)^{-1} = \frac{1}{G(y_k)(s)}$, niin generoivaa funktiota $\underline{1-s}$ vastaava jono $\underline{(1, -1, 0, 0, \ldots)}$ on jonon $(1, 1, 1, 1, \ldots)$ käänteisjono.

Huom. Koska $y_0 = 1 \neq 0$, niin lauseen 2.11.3. nojalla $G(y_k)(s)$ on kääntyvä.

<u>Tehtävä</u> 4. Määritettävä Lucas'in lukujonon $(L_k)_{k=0}^{\infty} = (2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \ldots)$ generoiva funktio suljetussa muodossa, kun $L_k = L_{k-1} + L_{k-2}$ $(k \geq 2)$, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$.

Nyt saadaan generoivan funktion määritelmästä

$$G(L_k)(s) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k s^k = L_0 + L_1 s + \sum_{k=2}^{\infty} L_k s^k$$

$$= 2 + s + \sum_{k=2}^{\infty} (L_{k-1} + L_{k-2}) s^k$$

$$= 2 + s + s \sum_{k=2}^{\infty} L_{k-1} s^{k-1} + s^2 \sum_{k=2}^{\infty} L_{k-2} s^{k-2}$$

(Muutetaan summaindeksiä ja lisätään yhtälöön $2s - 2s$) $\to$

$$= 2 + s + s \sum_{k=1}^{\infty} L_k s^k + s^2 \sum_{k=0}^{\infty} L_k s^k + 2s - 2s$$

$$= 2 - s + s \underbrace{\left(2 + \sum_{k=1}^{\infty} L_k s^k\right)}_{= G(L_k)(s)} + s^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} L_k s^k}_{= G(L_k)(s)}$$

$$= 2 - s + s G(L_k)(s) + s^2 G(L_k)(s).$$

Siis $G(L_k)(s) = 2 - s + s G(L_k)(s) + s^2 G(L_k)(s)$

$$\iff G(L_k)(s) = \frac{2 - s}{1 - s - s^2}$$

Tehtävä (5.) Ratkaistava alkuarvotehtävä

$y_k = 5y_{k-1} - 6y_{k-2}$ $(k \geq 2)$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$,

generoivan funktion menetelmällä.

Nyt saadaan generoivan funktion määritelmästä

$$G(y_k)(s) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k s^k = y_0 + y_1 s + \sum_{k=2}^{\infty} y_k s^k$$

$$= s + \sum_{k=2}^{\infty} (5y_{k-1} - 6y_{k-2}) s^k$$

$$= s + 5s \sum_{k=2}^{\infty} y_{k-1} s^{k-1} - 6s^2 \sum_{k=2}^{\infty} y_{k-2} s^{k-2}$$

$$\left(y_0 = 0, \text{ joten } \sum_{k=1}^{\infty} y_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} y_k s^k \right) \Rightarrow = s + 5s \sum_{k=0}^{\infty} y_k s^k - 6s^2 \sum_{k=0}^{\infty} y_k s^k$$

$$= s + 5s\,G(y_k)(s) - 6s^2 G(y_k)(s).$$

Täten $G(y_k)(s) = s + 5s\,G(y_k)(s) - 6s^2 G(y_k)(s)$

$$\Longleftrightarrow \quad G(y_k)(s) = \frac{s}{1-5s+6s^2} = \frac{s}{(1-2s)(1-3s)}.$$

Nyt saadaan osamurtokehitelmällä

$$G(y_k)(s) = \frac{s}{(1-2s)(1-3s)} = \frac{A}{1-2s} + \frac{B}{1-3s}$$

$$= \frac{A(1-3s) + B(1-2s)}{(1-2s)(1-3s)} = \frac{A - 3sA + B - 2sB}{(1-2s)(1-3s)},$$

mistä nähdään, että $A + B = 0$ ja $-3A - 2B = 1$,

jolloin $A=-B$, joten $-3A-2B=3B-2B=B=1$ ja täten
$A=-1$. Siis $G(y_k)(s)=\frac{B}{1-3s}+\frac{A}{1-2s}=\frac{1}{1-3s}-\frac{1}{1-2s}$

eli $G(y_k)(s)=\sum_{k=0}^{\infty}3^k s^k-\sum_{k=0}^{\infty}2^k s^k=\sum_{k=0}^{\infty}(3^k-2^k)s^k$.

Täten, koska $G(y_k)(s)=\sum_{k=0}^{\infty}y_k s^k=\sum_{k=0}^{\infty}(3^k-2^k)s^k$,

niin $\underline{\underline{y_k=3^k-2^k}}$ on alkuarvotehtävän ratkaisu.

Tehtävä (6). Ratkaistava alkuarvotehtävä
$y_k - 5y_{k-1} + 6y_{k-2} = 0$ $(k \geq 2)$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$
karakteristisen yhtälön menetelmällä.

Karakteristinen yhtälö on nyt $r^2 - 5r + 6 = 0$, joten
$r = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$ eli $r = 3$ tai $r = 2$.

Yleinen ratkaisu on siis $y_k = C_1 3^k + C_2 2^k$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Alkuarvoista saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} y_0 = C_1 3^0 + C_2 2^0 = C_1 + C_2 = 0 \\ y_1 = C_1 3^1 + C_2 2^1 = 3C_1 + 2C_2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C_1 = -C_2 \\ 3C_1 + 2C_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = -C_2 \\ -3C_2 + 2C_2 = -C_2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -1 \end{cases}.$$

Täten ratkaisu on $\underline{y_k} = C_1 3^k + C_2 2^k = \underline{\underline{3^k - 2^k}}$.

Tehtävä (7) Esimerkissä 2.13.4. päädytään differenssiyhtälöön $S_{k+1} = S_k + rS_k$ ja asetetaan alkuarvoksi $S_0 = A$. Nyt

$k=0$: $S_1 = S_0 + rS_0 = A + rA = (1+r)A$

$k=1$: $S_2 = S_1 + rS_1 = (1+r)S_1 = (1+r)\cdot(1+r)A = (1+r)^2 A$

$k=2$: $S_3 = S_2 + rS_2 = (1+r)S_2 = (1+r)\cdot(1+r)^2 A = (1+r)^3 A$

$k=3$: $S_4 = S_3 + rS_3 = \ldots = (1+r)^4 A$

$\vdots$

$S_k = (1+r)^k A$, kuten tehtävänannossa pyydetään induktiolla osoittamaan. Perusaskel onkin jo osoitettu.

Olet. siis, että $S_k = (1+r)^k A$ on differenssiyhtälön ratkaisu jollakin $k \in \mathbb{Z}_0^+$.

Nyt $S_{k+1} = S_k + rS_k = (1+r)S_k$

$$\overset{IO}{=} (1+r)\cdot(1+r)^k A$$

$$= (1+r)^{k+1} A,$$

joten $S_k = (1+r)^k A$ on differenssiyhtälön ratkaisu induktioperiaatteen nojalla.

Tehtävä (8.) Kuinka paljon on sellaisia n bitin jonoja, joissa ei ole 2 peräkkäistä nollaa?
(Vrt. monisteen sivu 41 tai HaukkomenKomb s. 22 kurssisivulla)
Olk. a_n kysytty lukumäärä. Tällöin tyhjiä jonoja on yksi, joten $a_0 = 1$. Yhden bitin jonoja ovat 1 ja 0, joten $a_1 = 2$. Olk. nyt $k \geq 2$. Tällöin bittijonot, joissa ei ole 2 peräkkäistä nollaa, voidaan jakaa kahteen erilliseen joukkoon: bittijonot, jotka päättyvät ykköseen (a_{n-1} kpl) ja bittijonot, jotka päättyvät nollaan (a_{n-2} kpl). Jonot ovat erillisiä, joten ratkaistava differenssiyhtälö on

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad k \geq 2, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 2.$$

Tämän karakteristinen yhtälö on $r^2 - r - 1 = 0$, joten $r = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Täten yleinen ratkaisu on

$$a_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

mistä saadaan alkuarvoilla $a_0 = 1$ ja $a_1 = 2$ yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} a_0 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = C_1 + C_2 = 1 \\ a_1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 - C_2 \\ (1-C_2)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 - C_2 \\ 1+\sqrt{5} \cancel{- C_2} - C_2\sqrt{5} \cancel{+ C_2} - C_2\sqrt{5} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 - C_2 \\ C_2 = \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}} \\ C_2 = \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

Täten sellaisia n bitin jonoja, joissa ei ole 2 peräkkäistä nollaa, on

$$\underline{\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n} \text{ kpl}$$

Tehtävä 9. Olk. A_k sellainen $k \times k$ matriisi, että sen kaikki diagonaalialkiot ovat $=1$ ja $a_{i,i+1}=1$, $a_{i+1,i}=-1$, kun $i=1,2,\dots,k-1$ sekä $a_{ij}=0$ muulloin. eli

$$A_k=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Olk. $d_k=\det(A_k)$. Kun $k=1$, niin $d_1=\det(A_1)=|1|=1$ ja kun $k=2$, niin

$$d_2=\det(A_2)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot 1-1\cdot(-1)=1+1=2.$$

Kofaktoriesityksellä 1. sarakkeen suhteen kun $k\geq 3$. saadaan

$$d_k \overset{(1)}{=} \overbrace{1\cdot(-1)^{(1+1)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & \ddots & & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}^{=d_{k-1}} + (-1)\cdot(-1)^{(1+2)}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & \ddots & & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(2)}{=} d_{k-1} + \underbrace{1\cdot(-1)^{(1+1)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & \ddots & & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{=d_{k-2}} = d_{k-1}+d_{k-2}$$

d_k toteuttaa siis toisen kertaluvun lineaarisen differenssiyhtälön

$$d_k = d_{k-1} + d_{k-2}, \quad k \geq 3, \quad d_1 = 1, \quad d_2 = 2.$$

(1) Poistetaan siis ensimmäisessä termissä matriisista A_k 1. rivi ja 1. sarake ja lasketaan tämän determinantti ja toisessa termissä poistetaan 1. sarake ja 2. rivi.

(2) Jatketaan kofaktoriesitystä edellä mainitun toisen termin suhteen.