Harjoitus $\boxed{5.}$

Tehtävä ① Ratkaistaan esimerkin 2.6.5 diffs.-yhtälö $y_{k+1}-2y_k=1$ menetelmällä I.

Vastaava homogeeniyhtälö $y_{k+1}-2y_k=0$ on ratkaistu monisteen esimerkissä 2.6.2. Merk. $y_0 := C \in \mathbb{R}$.

Saadaan: $k=0: \ y_1 = 2y_0 = 2C$

$k=1: \ y_2 = 2y_1 = 2\cdot 2C = 2^2C$

$k=2: \ y_3 = 2y_2 = 2\cdot 2^2C = 2^3C$

$\vdots$

$y_k = 2^kC, \ C\in\mathbb{R}.$

Homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on siis $y_k = 2^kC$.

Etsitään vielä yksityisratkaisu ensin vakion varioinnilla. Merkitään tätä varten $y_k = 2^kC_k$. Sijoittamalla tämä ratkaistavaan yhtälöön saadaan

$$y_{k+1}-2y_k = 2^{k+1}C_{k+1} - 2\cdot 2^kC_k = 2^{k+1}(C_{k+1}-C_k)$$

$= 2^{k+1}\Delta C_k = 1$, josta saadaan edelleen

$$\Delta C_k = 2^{-k-1} \Leftrightarrow \underline{C_k} = \Delta^{-1}(2^{-k-1}) = 2^{-1}\underbrace{\Delta^{-1}2^{-k}}$$

$= 2^{-1}(-2^{-k+1}(+C'))$ ratkaistu H4T1

$= -2^{-k}(+C'') = \underline{-2^{-k}}$

Yleinen ratkaisu on siis $\underline{y_k} = 2^kC + 2^k(-2^{-k}) = \underline{2^kC-1}$, $C\in\mathbb{R}$.

Yksityisratkaisu voidaan etsiä myös (helpommin) yritefunktiolla, sillä $b_k = 1$ on polynomi, jolloin yritefunktiolla $y_k = A$ saadaan

$$y_{k+1} - 2y_k = A - 2A = -A = 1 \iff A = -1,$$ joten

yhtälölle saadaan yleinen ratkaisu

$$\underline{y_k = 2^k C - 1}, \; C \in \mathbb{R}.$$

(Huom.)
Yksityisratkaisu saatiin nyt siis huomattavasti helpommin yritefunktion avulla. Kuitenkin menetelmässä I kumman tahansa tyylin eli vakion varioinnin tai yritefunktion avulla voidaan etsiä yksityisratkaisu. Tässä esitettiin molemmat esimerkin vuoksi.

Tehtävä (2.) Ratkaistava differenssiyhtälö $y_{k+1}^2 = y_k, y_k$ Otetaan vihjeen mukaisesti logaritmi yhtälöstä puolittain:

$$\ln(y_{k+1}^2) = \ln(y_k) \iff 2\ln(y_{k+1}) = \ln(y_k)$$
$$\iff \ln(y_{k+1}) = 2^{-1}\ln(y_k).$$

Merkitään $u_k = \ln(y_k)$. Tällöin ratkaistavaksi differenssiyhtälöksi saadaan $u_{k+1} = 2^{-1}u_k$, jonka yleinen ratkaisu saadaan merkinnällä $u_0 := C$:

$$k=0: \quad u_1 = 2^{-1}u_0 = 2^{-1}C$$
$$k=1: \quad u_2 = 2^{-1}u_1 = 2^{-1}\cdot 2^{-1}C = 2^{-2}C$$
$$k=2: \quad u_3 = 2^{-1}u_2 = 2^{-1}\cdot 2^{-2}C = 2^{-3}C$$
$$k=3: \quad u_4 = 2^{-1}u_3 = 2^{-1}\cdot 2^{-3}C = 2^{-4}C$$
$$\vdots$$
$$u_k = 2^{-k}C = C2^{-k}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Nyt sijoittamalla takaisin $u_k = \ln(y_k)$ saadaan edelleen:

$$\ln(y_k) = 2^{-k}C \overset{e^{(\ldots)}}{\underset{y_k>0}{\iff}} e^{\ln(y_k)} = e^{C2^{-k}}$$
$$\iff \underline{\underline{y_k = e^{C2^{-k}}}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Yhtälön yleinen ratkaisu on siis $y_k = e^{C2^{-k}}$, $C \in \mathbb{R}$. Ratkaisun pätevyys voidaan tarkistaa vielä sijoittamalla:

$$y_{k+1}^2 - y_k = (e^{C2^{-k-1}})^2 - e^{C2^{-k}} = e^{2\cdot C2^{-k-1}} - e^{C2^{-k}} = e^{C2^{-k}} - e^{C2^{-k}} = 0.$$

Tehtävä (3.) Esitettävä Lucas'n luvut suljetussa muodossa eli ratkaistava $L_{k+2} - L_{k+1} - L_k = 0$, $L_0 = 2$ $L_1 = 1$.

Tämän karakteristinen yhtälö on $r^2 - r - 1 = 0$, jonka juuret ovat $r = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Yhtälöllä on siis kaksi eri juurta, joten ratkaisu on

$$L_k = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k.$$ Alkuehdoilla $L_0 = 2$ ja $L_1 = 1$ saadaan

$$L_0 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = C_1 + C_2 = 2 \text{ ja}$$

$$L_1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1.$$ Nyt siis

$$C_1 = 2 - C_2, \text{ joten } (2 - C_2)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

avataan sulkuja

$$\Leftrightarrow \frac{2 + 2\sqrt{5}}{2} - \frac{C_2 + C_2\sqrt{5}}{2} + \frac{C_2 - C_2\sqrt{5}}{2} = 1$$

kerrotaan 2:lla

$$\Leftrightarrow \cancel{2} + 2\sqrt{5} \cancel{- C_2} - C_2\sqrt{5} \cancel{+ C_2} - C_2\sqrt{5} = \cancel{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{5} - C_2 2\sqrt{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow -C_2 \cdot 2\sqrt{5} = -2\sqrt{5} \Leftrightarrow \underline{C_2 = 1}.$$

Täten edelleen $\underline{C_1} = 2 - C_2 = 2 - 1 = \underline{1}$. Yhtälön $L_{k+2} = L_{k+1} + L_k$ ratkaisu alkuehdoilla $L_0 = 2$ ja $L_1 = 1$ on siis

$$\underline{L_k = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}.$$

Tehtävä (4.) Ratkaistava differenssiyhtälö $y_{k+2}+y_k=0$.
Kyseessä on toisen kertaluvun lineaarinen vakiokertoiminen differenssiyhtälö. Sen karakteristinen yhtälö on $r^2+1=0$, jonka juuret ovat $r=\pm\sqrt{-1}=\pm i$.
Nyt $\alpha=0$, $\beta=1$, $R=\sqrt{0^2+1^2}=1$ ja $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Tällöin ratkaisu on:

$$y_k=C_1\cdot 1^k\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)+C_2\cdot 1^k\cdot\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$=\underline{C_1\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)+C_2\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)},\quad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

Ratkaisuavaruus on siis $\{C_1\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)+C_2\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\mid C_1,C_2\in\mathbb{R}\}$ jonka eräs kanta on $\{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right),\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\}$ ja

$$\underline{\dim\left(\{C_1\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)+C_2\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\mid C_1,C_2\in\mathbb{R}\}\right)=2.}$$

Tehtävä 5. Ratkaistava differenssiyhtälö

$y_{k+2} - 4y_{k+1} + 3y_k = 0$. Tämän karakteristinen yhtälö on $r^2 - 4r + 3 = 0$, jonka juuret ovat $r = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$ $= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$. Täten ratkaisu on

$y_k = C_1 \cdot 3^k + C_2 \cdot 1^k = \underline{C_1 3^k + C_2}$. Ratkaisuavaruus on siis $\{C_1 3^k + C_2 \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$, jonka eräs kanta on $\{3^k, 1\}$ ja $\dim(\{C_1 3^k + C_2 \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}) = 2$.

Tehtävä (6.) Ratkaistava differenssiyhtälö
$y_{k+2}-4y_{k+1}+3y_k=3\cdot 4^k$. Yhtälöä vastaavan homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu $y_k=C_1 3^k+C_2$, $C_1,C_2\in\mathbb{R}$ on ratkaistu tehtävässä 5. Etsitään varsinaisen yhtälön jokin ratkaisu y_k vakioiden varioinnilla.
Asetetaan $y_k=A_k\phi_k^{(1)}+B_k\phi_k^{(2)}$, missä $\phi_k^{(1)}=3^k$, $\phi_k^{(2)}=1$ ja ratkaistavassa yhtälössä $b_k=3\cdot 4^k$ sekä funktioiden $\phi_k^{(1)}$ ja $\phi_k^{(2)}$ Casoratin determinantti on

$$D(k)=\begin{vmatrix}\phi_k^{(1)} & \phi_k^{(2)}\\ \phi_{k+1}^{(1)} & \phi_{k+1}^{(2)}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3^k & 1\\ 3^{k+1} & 1\end{vmatrix}=3^k-3^{k+1}=3^k(1-3)=(-2)\cdot 3^k.$$

Nyt $A_k=-\Delta^{-1}\frac{\phi_{k+1}^{(2)}b_k}{D(k+1)}=-\Delta^{-1}\frac{1\cdot 3\cdot 4^k}{(-2)\cdot 3^{k+1}}=\frac{1}{2}\Delta^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)^k$

Esim. 1.4.1 bj-kohta $\to$ $=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^k}{\frac{4}{3}-1}(+C)=\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^k}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^k$ ja

$$B_k=\Delta^{-1}\frac{\phi_{k+1}^{(1)}b_k}{D(k+1)}=\Delta^{-1}\frac{\cancel{3^{k+1}}\cdot 3\cdot 4^k}{(-2)\cdot\cancel{3^{k+1}}}=\left(-\frac{3}{2}\right)\Delta^{-1}4^k$$

Esim. 1.4.1 bj-kohta $\to$ $=\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot 4^k(+C')=\left(-\frac{1}{2}\right)4^k$.

Yhtälön yleinen ratkaisu on siis

$$y_k=C_1 3^k+C_2+\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^k 3^k-\frac{1}{2}4^k=C_1 3^k+C_2+\frac{3}{2}4^k-\frac{1}{2}4^k$$
$$=\underline{C_1 3^k+C_2+4^k},\quad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

Tehtävä (7) Ratkaistava differenssiyhtälö $y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 3k$. Ratkaistaan ensin vastaava homogeeniyhtälö $y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 0$. Sen karakteristinen yhtälö on $r^2 - 4r + 4 = 0$, jonka juuret ovat

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2.$$

Tällöin homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on $y_k = C_1 2^k + C_2 k 2^k$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Homogeenisen yhtälön ratkaisuavaruus on siis $\{C_1 2^k + C_2 k 2^k \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$, jonka eräs kanta on $\{2^k, k2^k\}$ ja täten $\dim(\{C_1 2^k + C_2 k 2^k \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}) = 2$.

Etsitään koko yhtälön yksityisratkaisu yritefunktion avulla. Nyt $b_k = 3k$ on polynomi, joten yritefunktiolla $y_k = Ak + B$ saadaan sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön

$$\begin{aligned}
y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k &= A(k+2) + B - 4A(k+1) - 4B + 4Ak + 4B \\
&= Ak + 2A + B \cancel{- 4Ak} - 4A \cancel{- 4B} \cancel{+ 4Ak} \cancel{+ 4B} \\
&= Ak - 2A + B = 3k,
\end{aligned}$$

jolloin nähdään, että $A = 3$ ja $B = 2A = 6$. Yksityisratkaisu on siis $Y_k = 3k + 6$. Täten yhtälön $y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 3k$ yleiseksi ratkaisuksi saadaan $\underline{y_k = C_1 2^k + C_2 k 2^k + 3k + 6}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Huom! Yritefunktioissa $A, B, C, \ldots$ ovat vakioita eivätkä riipu k:sta. Täten esim. $y_k = Ak$ ei käy yritefunktioksi, sillä

$$\begin{aligned} & A(k+2) - 4A(k+1) + 4Ak \\ &= Ak + 2A - \cancel{4Ak} - 4A + \cancel{4Ak} \\ &= Ak - 2A = 3k \\ \Leftrightarrow \quad & A = \frac{3k}{k-2} \end{aligned}$$

ei käy

Tehtävä 8. Olet., että differenssiyhtälön

$$y_{k+2} + p y_{k+1} + q y_k = 0 \quad (q \neq 0),\ k = 0, 1, \ldots$$

karakteristisella yhtälöllä on yksi kaksinkertainen juuri $r \in \mathbb{R}$.

Väite: Differenssiyhtälön ratkaisu on $y_k = C_1 r^k + C_2 k r^k$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Ts. $\{r^k, kr^k\}$ on ratkaisuavaruuden kanta.

Todistus: Osoitetaan nyt, että funktiot r^k ja kr^k ovat differenssiyhtälön ratkaisuja ja että ne ovat lineaarisesti riippumattomia.

r on differenssiyhtälön karakteristisen yhtälön juuri, joten $(*)\ r^2 + pr + q = 0$ ja $(**)\ r = -\frac{p}{2}$.

Osoitetaan, että $y_k = r^k$ on ratkaisu. Sijoittamalla:

$$\begin{aligned} y_{k+2} + p y_{k+1} + q y_k &= r^{k+2} + p r^{k+1} + q r^k \\ &= r^k r^2 + r^k pr + r^k q \\ &= r^k \underbrace{(r^2 + pr + q)}_{=0} \overset{(*)}{=} 0. \end{aligned}$$

Osoitetaan sitten, että $y_k = kr^k$ on ratkaisu:

$$y_{k+2} + p y_{k+1} + q y_k = (k+2) r^{k+2} + p(k+1) r^{k+1} + q k r^k$$

$$= k r^{k+2} + 2 r^{k+2} + p k r^{k+1} + p r^{k+1} + q k r^k$$

jatkuu

$$= kr^k\overbrace{(r^2+pr+q)}^{=0} + r^k(2r^2+pr)$$

$$\underset{(**)}{\overset{(*)}{=}} r^k\left(2\cdot\left(-\frac{p}{2}\right)^2 + p\cdot\left(-\frac{p}{2}\right)\right)$$

$$= r^k\left(2\cdot\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2}\right) = r^k\overbrace{\left(\frac{p^2}{2} - \frac{p^2}{2}\right)}^{=0} = 0,$$ joten

kr^k on yhtälön ratkaisu.

Osoitetaan vielä, että funktiot r^k ja kr^k ovat lineaarisesti riippumattomia. Niiden Casoratin determinantti on $D(k) = \begin{vmatrix} r^k & kr^k \\ r^{k+1} & (k+1)r^{k+1} \end{vmatrix}$

$$= (k+1)r^k r^{k+1} - \cancel{kr^k r^{k+1}}$$
$$= r^k r^{k+1} = r^{2k+1}.$$

Koska $q \neq 0$ ja r on kaksinkertainen juuri, niin $r^{2k+1} \neq 0$ jokaisella $k \in \mathbb{Z}_0^+$, joten seurauksen 2.4.1 nojalla r^k ja kr^k ovat lin. riippumattomia.

Täten $y_k = C_1 r^k + C_2 kr^k$ on differenssiyhtälön ratkaisu.

Tehtävä 9. Olk. u_k ja v_k differenssiyhtälön $y_{k+2} + p_k y_{k+1} + q_k y_{k+1} = 0$ ratkaisuja. Niiden Casoratin determinantti on

$$K(u,v)(k) = \begin{vmatrix} u_k & v_k \\ u_{k+1} & v_{k+1} \end{vmatrix} = u_k v_{k+1} - u_{k+1} v_k \overset{\text{merkitään}}{:=} K_k .$$

Nyt

$$\begin{aligned} K_{k+1} &= K(u,v)(k+1) \\ &= u_{k+1} v_{k+2} - u_{k+2} v_{k+1} \\ &= u_{k+1}(\underline{-p_k v_{k+1}} - q_k v_k) - (\underline{-p_k u_{k+1}} - q_k u_k) v_{k+1} \\ &= -q_k u_{k+1} v_k + q_k u_k v_{k+1} \\ &= q_k (u_k v_{k+1} - u_{k+1} v_k) \\ &= q_k K_k , \end{aligned}$$

joten ratkaisujen Casoratin determinantti toteuttaa yhtälön $K_{k+1} - q_k K_k = 0$.