Harjoitus 4. Tehtävä 1

Olk. $S=\mathbb{Z}_0^+$ ja $h=1$. Laskettava $\Delta^{-1}(k2^{-k})$ käyttämällä kaavaa $\Delta^{-1}(u\Delta v)=uv-\Delta^{-1}[(Ev)(\Delta u)]$.

Lasketaan tätä varten ensin $\Delta^{-1}(2^{-k})$. Nyt

$$(*)\quad \underline{\Delta 2^{-k}} \overset{\Delta\text{:n määr.}}{=} 2^{-k-1}-2^{-k}=2^{-1}2^{-k}-2^{-k}=2^{-k}\left(\tfrac{1}{2}-1\right)$$

$$=-\tfrac{1}{2}2^{-k}=-2^{-1}2^{-k}=\underline{-2^{-k-1}}.$$ Täten

$$(**)\quad \Delta^{-1}\Delta 2^{-k} \overset{(*)}{=} \Delta^{-1}(-2^{-k-1})$$

$$\iff 2^{-k}+C'=-2^{-1}\Delta^{-1}(2^{-k})$$

$$\overset{\cdot(-2)}{\iff} \underline{\Delta^{-1}2^{-k}}=-2\cdot 2^{-k}+C=\underline{-2^{-k+1}+C},$$ missä

C on h-jaksollinen funktio. Asetetaan nyt osittaisdifferenssikaavaa varten $u(k)=k$ ja $\Delta v(k)=2^{-k}$. Tällöin $\Delta u(k)=1$, $v(k)\overset{(**)}{=}-2^{-k+1}$ sekä $Ev(k)=-2^{-k}$. Nyt saadaan osittaisdifferenssikaavalla

$$\Delta^{-1}(u(k)\Delta v(k))=\underline{\Delta^{-1}(k2^{-k})}$$

$$=-k2^{-k+1}-\Delta^{-1}(-2^{-k})$$

$$=-k2^{-k+1}+\Delta^{-1}(2^{-k})$$

$$\overset{(**)}{=}-k2^{-k+1}-2^{-k+1}+C$$

$$=\underline{\underline{-2^{-k+1}(k+1)+C}}$$

Tehtävä (2.) Tutkittava määritelmän 2.4.1 nojalla lineaarista riippumattomuutta joukossa $\mathbb{Z}_0^+$ funktioille

a) 3^k ja $k3^k$. Olk. nyt $c_1 3^k + c_2 \cdot k3^k \equiv 0$.
Asettamalla $k=0 \in \mathbb{Z}_0^+$ saadaan $c_1 \cdot 3^0 + c_2 \cdot 0 \cdot 3^0 = c_1 = 0$
ja asettamalla $k=1 \in \mathbb{Z}_0^+$ saadaan $c_1 \cdot 3^1 + c_2 \cdot 1 \cdot 3^1$
$= 3c_1 + 3c_2 = 0$. Näistä ensimmäisestä nähdään
siis $c_1 = 0$, joten $3c_1 + 3c_2 = 3c_2 = 0$ eli $c_2 = 0$.
Siis $c_1 = c_2 = 0$, joten määritelmän
2.4.1. nojalla funktiot 3^k ja $k3^k$ ovat lineaarisesti riippumattomia joukossa $\mathbb{Z}_0^+$.

b) 3^k ja 3^{k+1}. Nämä funktiot eivät ole lineaarisesti riippumattomia joukossa $\mathbb{Z}_0^+$ määr. 2.4.1. nojalla, sillä niiden lineaarikombinaatio saadaan nollasta poikkeavilla kertoimilla nollaksi. Esim. $3 \cdot 3^k + (-1) \cdot 3^{k+1}$
$= 3^{k+1} - 3^{k+1} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_0^+$.

Tehtävä 3.

a) Määritettävä funktioiden $u_k^{(1)} = 3^k$ ja $u_k^{(2)} = k3^k$ Casoratin determinantti.

Määritelmän 2.4.2. nojalla funktioiden Casoratin matriisi on
$$C(k) = \begin{pmatrix} u_k^{(1)} & u_k^{(2)} \\ u_{k+1}^{(1)} & u_{k+1}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^k & k3^k \\ 3^{k+1} & (k+1)3^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Funktioiden Casoratin determinantti on siis
$$D(k) = \det C(k) = \begin{vmatrix} 3^k & k3^k \\ 3^{k+1} & (k+1)3^{k+1} \end{vmatrix} = 3^k \cdot (k+1)3^{k+1} - k3^k \cdot 3^{k+1}$$
$$= \cancel{k3^{2k+1}} + 3^{2k+1} \cancel{- k3^{2k+1}} = \underline{3^{2k+1}}.$$

b) Olet. tunnetuksi, että 3^k ja $k3^k$ ovat erään 2. kertaluvun homogeenisen diffs.yhtälön ratkaisuja. Tällöin, koska esim., kun $k=0$, niin $D(0) = 3^{2\cdot 0+1} = 3^1 = 3 \neq 0$ eli $\exists k \in \mathbb{Z}_0^+ : D(k) \neq 0$, joten Seurauksen 2.4.1. nojalla $\underset{c) \Rightarrow a)}{}$ <u>funktiot 3^k ja $k3^k$ ovat lin. riippumattomia.</u>

(Intuitiivisesti on myös selvää, että $3^{2k+1} \neq 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_0^+$.)

Tehtävä (4) Ratkaistava diffs.-yhtälö $y_{k+1}+(k+1)y_k=0$.

Kyseessä on 1. kertaluvun homogeeninen diffs.-yhtälö.

Tämän ratkaisun kantaesitys saadaan:

$k=0: \quad y_1=-(0+1)y_0=-y_0=-C$ ← (siis merk $y_0:=C$, sillä y_0 m.v.)

$k=1: \quad y_2=-(1+1)y_1=-2y_1=(-2)\cdot(-1)y_0=2C$

$k=2: \quad y_3=-(2+1)y_2=-3y_2=(-3)\cdot 2\cdot C=-6C$

$k=3: \quad y_4=-(3+1)y_3=-4y_3=(-4)\cdot(-3)\cdot 2\cdot C=24C$

$\vdots$

$$y_k=(-1)^k k!\,C=C(-1)^k k!, \text{ missä } C\in\mathbb{R}.$$

Differenssiyhtälön $y_{k+1}+(k+1)y_k=0$ ratkaisuavaruus on siis $\{C(-1)^k k! \mid C\in\mathbb{R}\}$, jonka eräs kanta on $\{(-1)^k k!\}$ ja täten $\dim(\{C(-1)^k k! \mid C\in\mathbb{R}\})=1$

Tehtävä 5. a) Ratkaistava diffs.-yhtälö $y_{k+1} - 4y_k = 0$.

Tälle saadaan kantaesitys:

$k=0: \quad y_1 = 4y_0 = 4C$ (merkitään jälleen $C := y_0$)

$k=1: \quad y_2 = 4y_1 = 4 \cdot 4y_0 = 4^2 C = 16C$

$k=2: \quad y_3 = 4y_2 = 4 \cdot 4y_1 = 4 \cdot 4^2 C = 4^3 C = 64C$

$k=3: \quad y_4 = 4y_3 = 4 \cdot 4y_2 = 4 \cdot 4^3 C = 4^4 C = 256C$

$\vdots$

$$y_k = 4^k C = C4^k, \text{ missä } C \in \mathbb{R}.$$

Täten ratkaisuavaruus on $\{C4^k \mid C \in \mathbb{R}\}$, jonka eräs kanta on $\{4^k\}$ ja $\dim(\{C4^k \mid C \in \mathbb{R}\}) = 1$

b) Ratkaistava diffs. yhtälö $y_{k+1} - 4y_k = 2^k$ menetelmällä I.
Yhtälön koko ratkaisujoukko on huomautuksen 2.6.1. ja a)-kohdan nojalla $\varphi_k + \{C4^k \mid C \in \mathbb{R}\}$. Etsitään siis yhtälön erityisratkaisu φ_k

1° Vakion varioinnilla:

Merkitään $y_k = 4^k C_k$. Tällöin saadaan sijoittamalla ratkaistavaan yhtälöön:

$$y_{k+1} - 4y_k = 4^{k+1} C_{k+1} - 4 \cdot 4^k C_k = 4^{k+1} C_{k+1} - 4^{k+1} C_k$$
$$= 4^{k+1}(C_{k+1} - C_k) = 4^{k+1} \Delta C_k$$

jatkuu

Täten $4^{k+1}\Delta C_k = 2^k \iff 2^{2k+2}\Delta C_k = 2^k$

$$\iff \Delta C_k = 2^{k-2k-2} = 2^{-k-2} = 2^{-2}2^{-k}$$

$$\iff C_k = \Delta^{-1}(2^{-2}2^{-k})$$

$$\iff C_k = 2^{-2}\Delta^{-1}2^{-k}$$

unohdetaan

($\Delta^{-1}2^{-k}$ ratkaistu tehtävässä 1)

$$\iff C_k = 2^{-2}(-2^{-k+1})(+C')$$

$$\iff C_k = -2^{-k-1}.$$

Vakioiden varioinnilla saadaan erityisratkaisuksi siis

$$\psi_k = 4^k C_k = 4^k(-2^{-k-1}) = -2^{2k}2^{-k-1} = -2^{k-1}.$$

2° yritefunktiolla: Tarkastellaan yritefunktiota $y_k = A2^k$. Sijoittamalla se ratkaistavaan yhtälöön saadaan:

$$y_{k+1} - 4y_k = 2^k \iff A2^{k+1} - 4A2^k = 2^k$$

$$\iff 2A\cancel{2^k} - 4A\cancel{2^k} = \cancel{2^k}$$

$$\iff 2A - 4A = 1$$

$$\iff A = -\frac{1}{2} = -2^{-1}.$$

Täten erityisratkaisuksi yritefunktiolla saadaan $\psi_k = (-2^{-1})2^k = -2^{k-1}$.

Yleinen ratkaisu diffs.yhtälölle on siis

$$\underline{\underline{y_k = 4^k C - 2^{k-1}}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Tehtävä (6.) Ratkaistava $y_{k+1} - 4y_k = 2^k$ (antidifferenssi)menetelmällä II.

Kertomalla puolittain termillä $4^{-(k+1)}$, 1-tehtävän tuloksella (**) ja reaalialgebralla saadaan:

$$y_{k+1} - 4y_k = 2^k \quad \| \cdot 4^{-(k+1)}$$

$$\Rightarrow 4^{-(k+1)} y_{k+1} - 4^{-k} y_k = 2^k 2^{-2k-2}$$

$$\Leftrightarrow \Delta(4^{-k} y_k) = 2^{-2} 2^{-k}$$

$$\Leftrightarrow 4^{-k} y_k = 2^{-2} \Delta^{-1} 2^{-k} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

(teht. 1.)

$$\Leftrightarrow 4^{-k} y_k = -2^{-2} 2^{-k+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y_k = 4^k (C - 2^{-k-1}), \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \underline{y_k} = 4^k C - \underbrace{4^k 2^{-k-1}}_{= 2^{2k} 2^{-k-1}} = \underline{4^k C - 2^{k-1}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Tehtävä 7. Differentiaaliyhtälön $Df(x)=f(x)$ ratkaisu on $f(x)=Ce^x$, $C\in\mathbb{R}$. Ratkaistava tämän diskreetti vastine $\Delta f(k)=f(k)$, kun $S=\mathbb{Z}_0^+$ ja $h=1$.

Nyt, kun $f\in\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{Z}_0^+}$, $k\in\mathbb{Z}_0^+$ ja $h=1$ saadaan

$$\Delta f(k)=f(k) \iff f(k+1)-f(k)=f(k) \iff f(k+1)-2f(k)=0.$$

Ratkaistavana on siis diffs.yhtälö $y_{k+1}-2y_k=0$.
Tämä on 1-kertaluvun homogeeninen diffs.yhtälö, ja sen yleinen ratkaisu on etsitty monisteen esimerkissä 2.6.2. ja se on $y_k=2^kC=C2^k$, $C\in\mathbb{R}$.
Ratkaisun pätevyys voidaan tarkistaa sijoittamalla se differenssiyhtälöön: $y_{k+1}-2y_k=C2^{k+1}-2C2^k$
$=2C2^k-2C2^k=0$.
Edelleen nähdään, että $\Delta(C2^k)=C\Delta 2^k=C(2^{k+1}-2^k)$
$=C(2^k(2-1))=C2^k$.
$f(k)=C2^k$ on siis yhtälön $\Delta f(k)=f(k)$ ratkaisu.

Tehtävä (8.) Tarkastellaan vektoriavaruutta $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_0^+} = \{f \mid f: \mathbb{Z}_0^+ \to \mathbb{R} \text{ on ftio}\}$

Väite: $L: \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_0^+} \to \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_0^+}$, $Ly_k = y_{k+n} + a_k^{(1)} y_{k+n-1} + \ldots + a_k^{(n)} y_k$ on lineaarikuvaus.

Todistus: Olk. $y, y' \in \mathcal{F}_{\mathbb{Z}_0^+}$ ja $b \in \mathbb{R}$. Nyt, kun $k, n \in \mathbb{Z}$

$$L((y+y')_k) \overset{(1)}{=} (y+y')_{k+n} + a_k^{(1)}(y+y')_{k+n-1} + \ldots + a_k^{(n)}(y+y')_k$$

$$\overset{(2)}{=} y_{k+n} + y'_{k+n} + a_k^{(1)} y_{k+n-1} + a_k^{(1)} y'_{k+n-1} + \ldots + a_k^{(n)} y_k + a_k^{(n)} y'_k$$

$$\overset{(3)}{=} y_{k+n} + a_k^{(1)} y_{k+n-1} + \ldots + a_k^{(n)} y_k + y'_{k+n} + a_k^{(1)} y'_{k+n-1} + \ldots + a_k^{(n)} y'_k$$

$$\overset{(4)}{=} Ly_k + Ly'_k \quad \text{ja}$$

$$L((by)_k) \overset{(5)}{=} (by)_{k+n} + a_k^{(1)}(by)_{k+n-1} + \ldots + a_k^{(n)}(by)_k$$

$$\overset{(6)}{=} by_{k+n} + ba_k^{(1)} y_{k+n-1} + \ldots + ba_k^{(n)} y_k$$

$$\overset{(7)}{=} b(y_{k+n} + a_k^{(1)} y_{k+n-1} + \ldots + a_k^{(n)} y_k)$$

$$\overset{(8)}{=} bLy_k.$$

L on siis lineaarikuvaus määritelmän nojalla.

(1), (4), (5), (8): L:n määritelmä.

(2): Funktioiden summa $\left((y+y')_k = (y+y')(k) = y(k) + y'(k) = y_k + y'_k \right)$

(6): Funktion kertominen vakiolla $\left((by)_k = (by)(k) = by(k) = by_k \right)$

(3), (7): Reaalialgebraa

Tehtävä 9 Täydennettävä lause 2.5.2., joka sanoo, että lineaarisen n. kertaluvun diffs.yhtälön

(2.3) $y_{k+n}+a_k^{(1)}y_{k+n-1}+\dots+a_k^{(n)}y_k=b_k$

yleinen ratkaisu on $y_k=\theta_k+\psi_k$, missä θ_k on vastaavan homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu eli

(*) $\theta_{k+n}+a_k^{(1)}\theta_{k+n-1}+\dots+a_k^{(n)}\theta_k\equiv 0$ ja ψ_k on koko yhtälön jokin yksittäisratkaisu eli

(**) $\psi_{k+n}+a_k^{(1)}\psi_{k+n-1}+\dots+a_k^{(n)}\psi_k=b_k$.

Osoitetaan, että $y_k=\theta_k+\psi_k$ toteuttaa yhtälön (2.3):

$$
\begin{aligned}
y_{k+n}+a_k^{(1)}y_{k+n-1}+\dots+a_k^{(n)}y_k &= (\theta+\psi)_{k+n}+a_k^{(1)}(\theta+\psi)_{k+n-1}+\dots+a_k^{(n)}(\theta+\psi)_k\\
&= \theta_{k+n}+\psi_{k+n}+a_k^{(1)}\theta_{k+n-1}+a_k^{(1)}\psi_{k+n-1}+\dots+a_k^{(n)}\theta_k+a_k^{(n)}\psi_k\\
&= \theta_{k+n}+a_k^{(1)}\theta_{k+n-1}+\dots+a_k^{(n)}\theta_k+\psi_{k+n}+a_k^{(1)}\psi_{k+n-1}+\dots+a_k^{(n)}\psi_k\\
&\overset{(*)}{\underset{(**)}{=}} 0+b_k=\underline{b_k}.
\end{aligned}
$$

Osoitetaan, että kun y_k on yhtälön (2.3) jokin ratkaisu, niin $y_k-\psi_k$ toteuttaa yhtälöä (2.3) vastaavan homogeenisen yhtälön: $y_{k+n}-\psi_{k+n}+a_k^{(1)}y_{k+n}-a_k^{(1)}\psi_{k+n}+\dots+a_k^{(n)}y_k-a_k^{(n)}\psi_k$

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{(y_{k+n}+a_k^{(1)}y_{k+n}+\dots+a_k^{(n)}y_k)}_{b_k}-\underbrace{(\psi_{k+n}+a_k^{(1)}\psi_{k+n}+\dots+a_k^{(n)}\psi_k)}_{b_k}\\
&= b_k - b_k\\
&= \underline{0}.
\end{aligned}
$$

Todistuksen kohdat 2) ja 3) on nyt sijoituksilla täydennetty.