Kombinatoriikkaa

Pentti Haukkanen

Sisällys

Esipuhe

Kombinatoriikassa tutkitaan lyhyesti sanottuna menetelmiä erilaisten äärellisten joukkojen alkioiden lukumäärän laskemiseksi. Tässä monisteessa esitellään muutamia keskeisimpiä kombinatoriikan menetelmiä.

Lukijan oletetaan hallitsevan matematiikan perusteet. Käytännössä tämä tarkoittaa opintojakson Diskreetti matematiikka I suoritusta. Opintojakson opetusmateriaalina on Jorma Merikosken, Ari Virtasen ja Pertti Koiviston opetusmoniste Diskreetti matematiikka I.

1 Summa- ja tuloperiaate

Summaperiaate
Oletetaan, että
tehtävä 1 voidaan suorittaa n_1 tavalla,
tehtävä 2 voidaan suorittaa n_2 tavalla ja että
tehtäviä ei voi suorittaa samanaikaisesti.
Silloin on
$n_1 + n_2$ tapaa suorittaa joko tehtävä 1 tai 2.

Huom. Summaperiaate pätee myös useampaan kuin kahteen tehtävään.

Huom. Joukko-opin merkinnöin summaperiaate voidaan kirjoittaa muodossa

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|,$$

missä $A_i \cap A_j = \emptyset$ aina, kun $i \neq j$.

Tuloperiaate
Oletetaan, että tarkasteltava tehtävä voidaan jakaa 2 osatehtävään.
Edelleen oletetaan, että
osatehtävistä 1. voidaan suorittaan n_1 tavalla
ja
osatehtävistä 2. voidaan suorittaan n_2 tavalla sen jälkeen, kun 1. osatehtävä on suoritettu.
Silloin koko tehtävä voidaan suorittaa $n_1 \cdot n_2$ tavalla.

Huom. Tuloperiaate voidaan yleistää jaoksi useampaan kuin kahteen osatehtävään.

Huom. Joukko-opin termein tuloperiaate voidaan kirjoittaa muodossa

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|.$$

Erotusperiaate
Oletetaan, että tehtävä voidaan suorittaa n tavalla, joista r $(0 \leq r \leq n)$ tapaa ei ole sallittua. Silloin sallittuja tapoja on $n - r$ kpl.

Huom. Erotusperiaate joukko-opin termein: Jos $B \subseteq A$, niin $|A \setminus B| = |A| - |B|$.

2 Permutaatiot ja kombinaatiot

2.1 Joukon permutaatio

Määritelmä Joukon A permutaatio on joukon A bijektio itselleen.

Permutaatiota merkitään usein symbolilla π. Esimerkiksi kuvaus $\pi : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $\pi(i) = i+1$ on joukon $\mathbf{Z}$ permutaatio. Yleensä tutkitaan äärellisten joukkojen permutaatioita.

Esimerkki 2.1.1 Jos $A = \{1, 2, 3\}$, niin $\pi : A \to A$, $\pi(1) = 1$, $\pi(2) = 3$, $\pi(3) = 2$ on joukon A (yksi) permutaatio.

Olkoon nyt $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ja π joukon X jokin permutaatio. Silloin merkinnän π ohella käytetään myös merkintöjä

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \pi(x_1) & \pi(x_2) & \cdots & \pi(x_n) \end{pmatrix}$$

ja

$$(\pi(x_1), \pi(x_2), \cdots, \pi(x_n)) .$$

Esimerkin 2.1.1 permutaatiot voidaan siis kirjoittaa myös muodoissa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ja

$$(1, 3, 2) .$$

Määritelmä Jos $|A| = n$ ja $0 < k \leq n$, niin joukon A k-permutaatio on joukon A k-alkioisen osajoukon permutaatio. Erityisesti n-permutaatio on permutaatio.

Esimerkki 2.1.2 Jos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, niin $(4, 1, 3)$ on joukon A (yksi) 3-permutaatio.

Huom. Permutaatiota voidaan pitää

i) järjestettynä joukkona,

ii) lukujonona, jossa mikään jonon jäsen ei esiinny yhtä kertaa useammin.

Merk. $P(n, r)$ on n-alkioisen joukon r-permutaatioiden lukumäärä.

Lause 2.1.1 *$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$, ts. $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$.*

Tod. Käytetään tulosääntöä. Jaetaan r-permutaation muodostus r osatehtävään.

Valitaan	1.	alkio, jolloin on	n	vaihtoehtoa.
Valitaan	2.	alkio, jolloin on	$n-1$	vaihtoehtoa.
Valitaan	3.	alkio, jolloin on	$n-2$	vaihtoehtoa.
	$\vdots$		$\vdots$	
Valitaan	r.	alkio, jolloin on	$n-(r-1)$	vaihtoehtoa.

Tulosäännön mukaan saadaan väite.

Huom. Lause 2.1.1 antaa vastauksen seuraaviin kysymyksiin.

1) Kuinka monella tavalla n eri esineestä voidaan valita r kpl, kun sama esine voidaan valita vain kerran ja kun valinnan järjestyksellä on merkitystä?

2) Kuinka monella tavalla r eri esinettä voidaan asettaa n erilaiseen laatikkoon, kun kuhunkin laatikkoon asetetaan korkeintaan 1 esine?

Harj. Todista, että n-alkioisen joukon kaikkien järjestettyjen osajoukkojen lkm on $\lfloor e \cdot n! \rfloor$.

2.2 Joukon kombinaatio

Määritelmä Kombinaatio on synonyymi joukon käsitteelle. Jos joukossa S on n alkiota ja $0 \leq k \leq n$, niin joukon S k-kombinaatio on joukon S k-alkioinen osajoukko. Erityisesti n-kombinaatio on joukko S itse ja 0-kombinaatio on tyhjä joukko $\emptyset$.

Esimerkki 2.2.1 *Joukko* $\{1,3,4\}$ *on joukon* $\{1,2,3,4\}$ *(yksi) 3-kombinaatio.*

Merk. $C(n,r)$ on n-alkioisen joukon r-kombinaatioiden lkm.

Lause 2.2.1

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

ts. $C(n,r) = \binom{n}{r}$, *missä* $\binom{n}{r}$ *on binomikerroin.*

Tod. n-alkioisen joukon r-permutaation muodostaminen voidaan jakaa 2 osaan:

1) muodostetaan r-kombinaatio, $C(n,r)$ tapaa,
2) järjestetään r-kombinaatio, $P(r,r)$ tapaa.

Tulosäännön mukaan r-permutaatioita on $C(n,r) \cdot P(r,r)$ kpl. Toisaalta Lauseen 2.1.1 mukaan r-permutaatioita on $P(n,r)$ kpl. Siis

$$C(n,r) \cdot P(r,r) = P(n,r),$$

joten

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{n!/(n-r)!}{r!/(r-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Huom. Lause 2.2.1 antaa vastauksen seuraaviin kysymyksiin.

1) Kuinka monella tavalla n eri esineestä voidaan valita r kpl, kun sama esine voidaan valita vain kerran ja kun valinnan järjestyksellä ei ole merkitystä?

2) Kuinka monella tavalla r samanlaista esinettä voidaan asettaa n erilaiseen laatikkoon, kun kuhunkin laatikkoon asetetaan korkeintaan 1 esine?

2.3 Multijoukon permutaatio

Multijoukolla tarkoitetaan sellaista joukon yleistystä, jossa sama alkio voi esiintyä monta kertaa ja jossa alkioiden esiintymiskerrat otetaan huomioon. Sen sijaan alkioiden järjestyksellä ei ole merkitystä.

Multijoukko $M = \{r_1 \cdot x_1, r_2 \cdot x_2, \ldots, r_n \cdot x_n\}$ on multijoukko, jossa alkio x_i esiintyy r_i kertaa, missä $1 \leq r_i \leq \infty$ ja r_i on alkion x_i ns. toistoluku ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Olkoon $r \in \mathbf{Z}^+$. Silloin multijoukon M r-permutaatio on r alkion jono, jonka elementit ovat joukon $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ alkioita ja jossa alkio x_i esiintyy korkeintaan r_i kertaa ($i = 1, 2, \ldots, n$). Esimerkiksi jono (x_1, x_3, x_1) on multijoukon $\{3 \cdot x_1, 2 \cdot x_2, \infty \cdot x_3\}$ yksi 3-permutaatio. Huomaa, että esimerkiksi jono (x_3, x_1, x_1) on multijoukon $\{3 \cdot x_1, 2 \cdot x_2, \infty \cdot x_3\}$ eri 3-permutaatio kuin (x_1, x_3, x_1).

Lause 2.3.1 *Multijoukon $\{\infty \cdot x_1, \ldots, \infty \cdot x_n\}$ r-permutaatioiden lukumäärä on n^r.*

Tod. r-permutaation jokainen elementti voidaan valita n tavalla.

Huom. Lause 2.3.1 antaa vastauksen seuraaviin kysymyksiin.

1) Kuinka monella tavalla n eri esineestä voidaan valita r esinettä, kun sama esine voidaan valita useammin kuin kerran ja kun valinnan järjestyksellä on merkitystä?

2) Kuinka monella tavalla r eri esinettä voidaan asettaa n erilaiseen laatikkoon, kun yhteen laatikkoon voidaan laittaa useampi kuin yksi esine?

Lause 2.3.2 *Multijoukon $\{r_1 \cdot x_1, \ldots, r_n \cdot x_n\}$ r-permutaatioiden lukumäärä on*

$$\frac{r!}{r_1! r_2! \cdots r_n!},$$

missä $r = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$ (ja r_i :t ovat äärellisiä).

Tod. Permutaatiossa on paikkoja r kpl. Paikkojen täyttäminen voidaan jakaa n osaan:

1) Sijoitetaan alkiot x_1 (r_1 kpl) vapaisiin paikkoihin (r kpl):

$$\binom{r}{r_1} \text{tapaa.}$$

2) Sijoitetaan alkiot x_2 (r_2 kpl) vapaisiin paikkoihin ($r - r_1$ kpl):

$$\binom{r - r_1}{r_2} \text{tapaa.}$$

Jatketaan näin kunnes päästään viimeiseen osaan.

n) Sijoitetaan alkiot x_n (r_n kpl) vapaisiin paikkoihin ($r - r_1 - \cdots - r_{n-1}$ kpl):

$$\binom{r - r_1 - \cdots - r_{n-1}}{r_n} \text{tapaa.}$$

Tulosäännön mukaan tapoja on

$$\binom{r}{r_1}\binom{r - r_1}{r_2} \cdots \binom{r - r_1 - \cdots - r_{n-1}}{r_n}$$

eli

$$\frac{r!}{r_1! r_2! \cdots r_n!}.$$

2.4 Multijoukon kombinaatio

Olkoon $r \in \mathbf{Z}^+$. Multijoukon $M = \{r_1 \cdot x_1, \ldots, r_n \cdot x_n\}$ r-kombinaatio on multijoukko $\{s_1 \cdot x_1, \ldots, s_n \cdot x_n\}$, missä $\sum_{i=1}^{n} s_i = r$ ja $0 \leq s_i \leq r_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Jos toistoluku s_i on $= 0$, niin alkio x_i ei kuulu multijoukkoon $\{s_1 \cdot x_1, \ldots, s_n \cdot x_n\}$.

Esimerkki 2.4.1 Multijoukko $\{2 \cdot x_2, 7 \cdot x_3\}$ on multijoukon $\{3 \cdot x_1, 2 \cdot x_2, \infty \cdot x_3\}$ (yksi) 9-kombinaatio.

Lause 2.4.1 *Multijoukon $\{\infty \cdot x_1, \ldots, \infty \cdot x_n\}$ r- kombinaatioiden lukumäärä on*

$$\binom{r + n - 1}{r}.$$

Tod. n-alkioisen multijoukon jokaista r-kombinaatiota vastaa lista, jossa on $n-1$ pystyviivaa ja r tähteä, ja päinvastoin. Pystyviivat erottavat listasta n solua ja i. solun tähtien lkm ilmoittaa i. alkion lkm:n kombinaatiossa. Tällaisia listoja on $\binom{r+n-1}{r}$ kpl.

Huom. Lause 2.4.1 antaa vastauksen seuraaviin kysymyksiin.

1) Kuinka monella tavalla n eri esineestä voidaan valita r esinettä, kun sama esine voidaan valita useammin kuin kerran ja kun valittujen esineiden järjestyksellä ei ole merkitystä?

2) Kuinka monella tavalla r samanlaista esinettä voidaan asettaa n erilaiseen laatikkoon, kun yhteen laatikkoon voidaan laittaa useampi kuin yksi esine?

3) Mikä on yhtälön $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$, $x_i \geq 0$ ratkaisujen lkm?

Huom. Äärellisen toistoluvun multijoukkojen r-kombinaatioiden lukumäärää voi tarkastella seulamenetelmällä (ks. §5.3).

3 Binomikerroin

3.1 Kombinatorisia tulkintoja

Esimerkki 3.1.1 Jo aikaisemmin on todettu, että $C(n,r)$ kertoo n-alkioisen joukon r-kombinaatioiden lukumäärän.

Esimerkki 3.1.2 Sellaisia n bitin jonoja, joissa on r ykköstä, on $C(n,r)$ kappaletta. (Tässä bittijono voidaan korvata millä tahansa 2 eri symbolia käyttävällä jonolla.)

Esimerkki 3.1.3 On hyvin tunnettua, että polynomin $(x+y)^n$ termin $x^r y^{n-r}$ kerroin on $C(n,r)$, ts. $(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)x^r y^{n-r}$.

Esimerkki 3.1.4 Lyhimpiä reittejä pisteestä $(0,0)$ pisteeseen (n,r) hilan $\mathbf{Z}^2$ pisteiden kautta on $C(n+r,r)$ kappaletta.

Esimerkki 3.1.5 Joukossa $\{(i_1, i_2, \ldots, i_r) \mid 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n\}$ on $C(n,r)$ alkiota.

Esimerkki 3.1.6 Aidosti kasvavien funktioiden $f : \{1,2,\ldots,r\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ lkm on $C(n,r)$.

Harj. Olkoot $A = (x,y)$ ja $B = (x+1,y)$ hilan $\mathbf{Z}^2$ pisteitä. Kuinka paljon on sellaisia lyhimpiä reittejä origosta pisteeseen (n,r), jotka kulkevat a) pisteen A kautta, b) pisteiden A ja B kautta?

Harj. Kuinka paljon on erilaisia lottorivejä?

3.2 Identiteettejä

Lause 3.2.1 $C(n,r) = C(n,n-r)$.

Tod. Valitaan n ehdokkaan joukosta r pelaajaa joukkueeseen. Tehtävä on sama kuin $n-r$ pelaajan jättäminen pois joukkueesta.

Lause 3.2.2 (Pascalin kaava) $C(n+1,r) = C(n,r-1) + C(n,r)$.

Tod. Oletetaan, että $n+1$ pelaajan joukossa on 1 tähtipelaaja. Joukkueeseen voidaan valita r pelaajaa $C(n+1,r)$ tavalla. Näistä vaihtoehdoista $C(n,r-1)$ kpl on sellaisia, joissa tähti on mukana, ja $C(n,r)$ kpl sellaisia, joissa hän ei ole mukana.

Lause 3.2.3 $C(n,r)\,r = n\,C(n-1,r-1)$.

Tod. Valitaan n ehdokkaan joukosta r pelaajaa joukkueeseen ja näistä r pelaajasta 1 kapteeniksi. Sama valinta voidaan suorittaa niin, että ensin n ehdokkaan joukosta valitaan 1 kapteeniksi ja sen jälkeen valitaan $n-1$ jäljellä olevasta pelaajasta loput $r-1$ pelaajaa joukkueeseen.

Lause 3.2.4 $C(m+n,r) = \sum_{k=0}^{r} C(m,k)C(n,r-k)$.

Tod. Valitaan r pelaajan joukkue. Käytössä on m pelaajaa joukkueesta A ja n pelaajaa joukkueesta B ($A \cap B = \emptyset$). Joukkueesta A voidaan valita k pelaajaa ($k = 0, 1, \ldots, r$), jolloin joukkueesta B valitaan $r-k$ pelaajaa.

Huom. Lauseet 3.2.1 – 3.2.4 voidaan tulkita myös binomikaavan $(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)x^r y^{n-r}$ kielellä:

3.2.1) $(x+1)^n = (1+x)^n$,

3.2.2) $(x+1)^{n+1} = (x+1)(x+1)^n$,

3.2.3) $\frac{d}{dx}\sum_{r=0}^{n} C(n,r)x^r = \frac{d}{dx}(x+1)^n$,

3.2.4) $(x+1)^{m+n} = (x+1)^m(x+1)^n$.

Harj. Todista lauseet 3.2.1 – 3.2.4 algebrallisesti.

Harj. a) Todista, että $\sum_{r=0}^{n} C(n,r) = 2^n$. b) Tulkitse a-kohta osajoukkojen kielellä.

Harj. a) Todista, että

$$\sum_{\substack{r=0 \\ r \text{ parillinen}}}^{n} C(n,r) = \sum_{\substack{r=0 \\ r \text{ pariton}}}^{n} C(n,r).$$

b) Tulkitse a-kohta osajoukkojen kielellä.

Harj. Tulkitse lause 3.2.4 lyhimpien reittien kielellä.

3.3 Newtonin binomilause

Vuonna 1676 Newton kehitti sarjakehitelmän lauseelle $(x+y)^\alpha$, missä $\alpha \in \mathbf{R}$. Tämä tulos yleistää tavanomaisen binomilauseen, missä $\alpha = n \in \mathbf{Z}^+$.

Lause 3.3.1 *Olkoon* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Silloin*

$$(x+y)^\alpha = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{\alpha}{r} x^r y^{\alpha-r}, \quad |x/y| < 1,$$

missä

$$\binom{\alpha}{r} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-r+1)}{r!}.$$

Tod. Perustuu Taylorin kaavaan (ks. analyysin kirjat). Sivuutetaan.

Esimerkki 3.3.1 Kun $\alpha = n \in \mathbf{Z}^+$, niin

$$\binom{n}{r} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-r)!r!}, & 0 \le r \le n, \\ 0, & r > n. \end{cases}$$

(Totea!) Tällöin lauseesta 3.3.1 tulee tavallinen binomilause.

Esimerkki 3.3.2 Kun $\alpha = -n$, missä $n \in \mathbf{Z}^+$, niin

$$\binom{-n}{r} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r}.$$

(Totea!)

Huom. Kun asetetaan $z = x/y$, niin lause 3.3.1 saadaan muotoon

$$(1+z)^\alpha = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{\alpha}{r} z^r, \quad |z| < 1.$$

Erityisesti, kun $n \in \mathbf{Z}^+$, niin

$$\begin{aligned} (1+z)^{-n} &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{n+r-1}{r} z^r, \quad |z| < 1, \\ (1-z)^{-n} &= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} z^r, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

Harj. Todista, että

$$\sqrt{1+z} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r2^{2r-1}} \binom{2r-2}{r-1}.$$

4 Laatikkoperiaate

4.1 Yksinkertainen muoto

Lause 4.1.1 *Jos $n+1$ esinettä asetetaan n laatikkoon, niin ainakin yhteen laatikkoon tulee enemmän kuin yksi esine.*

(**Tod.** Jos kaikissa laatikoissa on korkeintaan yksi esine, niin esineitä on yhteensä korkeintaan n.)

Huom. Lause 4.1.1 voidaan esittää muodossa 'Jos $|X| = n+1$ ja $|Y| = n$, niin ei ole olemassa injektiota $f : X \to Y$'.

Esimerkki 4.1.1 13 henkilön joukossa on ainakin 2 henkilöä, joilla on syntymäpäivä samassa kuukaudessa.

Esimerkki 4.1.2 Olkoon α irrationaaliluku. Silloin on ääretön määrä sellaisia rationaalilukuja p/q, että

$$|\alpha - p/q| < q^{-2}. \tag{4.1}$$

Tod. Osoitetaan, että

(i) jokaista positiivista kokonaislukua n kohti on olemassa sellainen rationaaliluku p/q, että

$$|\alpha - p/q| < \frac{1}{nq}, \tag{4.2}$$

missä $q \leq n$.

Huomaa, että tällöin (4.1) pitää paikkansa. Valitaan mielivaltainen n. Tarkastellaan $n+1$ lukua $\{i\alpha\}$ ja $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Huomaa, että $\{i\alpha\} = i\alpha - \lfloor i\alpha \rfloor$. Jokainen näistä luvuista kuuluu johonkin väleistä $(j/n, (j+1)/n)$, missä $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Välejä on siis n kpl ja lukuja $n+1$ kpl. Laatikkoperiaatteen mukaan jokin väleistä sisältää 2 lukua, sanokaamme luvut $\{i_1\alpha\}$ ja $\{i_2\alpha\}$. Näin ollen $|\{i_1\alpha\} - \{i_2\alpha\}| < \frac{1}{n}$. Asetetaan $q = |i_1 - i_2|$. On olemassa sellainen kokonaisluku p, että

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{n}.$$

Nyt kaava (4.2) saadaa jakamalla yo epäyhtälö puolittain luvulla q. Koska $q = |i_1 - i_2|$, missä $i_1, i_2 = 1, 2, \ldots, n+1$, niin $q \leq n$. Näin ollen väite (i) pitää paikkansa.

Huom. Tulos (i) antaa rationaalisen approksimaation p/q irrationaaliluvulle α. Approksimaatiota voidaan parantaa seuraavasti. Koska α on irrationaalinen ja p/q rationaalinen, niin $\alpha \neq p/q$ eli $|\alpha - p/q| > 0$. Näin ollen on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku n_1, että $|\alpha - p/q| > 1/n_1$. Lukua n_1 vastaa tuloksen (i) nojalla luvun α jokin rationaalinen approksimaatio, sanokaamme p_1/q_1. Tämä approksimaatio on parempi kuin lukua n vastaava approksimaatio, sillä

$$|\alpha - p_1/q_1| < 1/(n_1 q_1) \leq 1/n_1 < |\alpha - p/q|.$$

Jatkamalla prosessia saadaan ääretön määrä paranevia approksimaatioita.

Harj.1 Asetetaan 10 pistettä neliöön, jonka sivun pituus on 3 yksikköä. Osoita, että on 2 pistettä, joiden etäisyys on $\leq \sqrt{2}$.

(Chen p. 121)

4.2 Yleistettyjä laatikkoperiaatteita

Lause 4.2.1 *Jos $kn+1$ esinettä asetetaan n laatikkoon, niin ainakin yhteen laatikkoon tulee enemmän kuin k esinettä.*

Lause 4.2.2 *Jos $k_1+k_2+\cdots+k_n+1$ esinettä asetetaan n laatikkoon, niin on olemassa sellainen $i = 1, 2, \ldots, n$, että i. laatikkoon tulee enemmän kuin k_i esinettä.*

Esimerkki 4.2.1 Viiden henkilön joukossa on ainakin 3, jotka ovat samaa sukupuolta.

Harj. Olkoon $\{a_1, a_2, \ldots, a_5\}$ joukko kokonaislukuja ja olkoon π jokin sen permutaatio. Todista, että tulo

$$\prod_{i=1}^{5}(a_i - \pi(a_i))$$

on aina parillinen. (Sovella esimerkkiä 4.2.1.)

(Chen p. 123)

4.3 Ramseyn luvut

Ramseyn tyypin probleemissa käytetään usein hyväksi laatikkoperiaatetta. Aloitamme tarkastelun esimerkillä.

Esimerkki 4.3.1 (i) Kuusi pistettä A, B, C, D, E, F ja ne pareittain yhdistävät 15 janaa piirretään tasoon. Osa janoista väritetään sinisiksi, loput punaisiksi. Silloin jonkin kolmion kaikki sivut ovat samanvärisiä

(ii) Viidelle pisteelle tulos ei pidä välttämättä paikkaansa.

Tod. (i) Tarkastellaan janoja AB, AC, AD, AE, AF. Niistä ainakin 3 on samaa väriä, sanokaamme sinisiä. Symmmetrisyyden nojalla voimme olettaa, että AB, AC, AD ovat sinisiä. Tarkastellaan nyt janoja BC, BD ja CD. Jos kaikki ovat punaisia, ne muodostavat halutun (punaisen) kolmion. Jos niistä ainakin 1 on sininen, saadaan haluttu kolmio sinisenä tarkastelemalla kutakin janaa janojen AB, AC, AD kanssa.

(ii) Annetaan vastaesimerkki.

Huom. Esimerkki 4.3.1 esitetään kirjallisuudessa usein myös seuraavin termein.

1) Kyseessä on 2 henkilön peli. Toisella pelaajalla on sininen kynä ja toisella punainen. Pelaajat värittävät janoja vuorotellen. Peli päättyy, kun toinen pelaajista saa aikaan värinsä mukaisen kolmion.

2) Pisteet ovat henkilöitä, jotka ovat pareittain toisilleen tuttuja tai outoja.

Tarkastelemme esimerkin 4.3.1 tilannetta yleisemmin.

Määrittelemme, että n-klikki (engl. n-clique) on sellainen kuvio, jossa on n pistettä ja jossa kaikkien pisteparien välillä on viiva. Merkitsemme n-klikkiä symbolilla K_n. Graafiteorian kielellä n-klikit ovat täydellisiä graafeja. Erikoisesti 1-klikki on yksi piste, 2-klikki on kaksi pistettä ja ne yhdistävä jana ja 3-klikki on kolmio. Esimerkin 4.3.1 (i) kuvio on 6-klikki ja (ii) kuvio on 5-klikki.

Määritelmä Olkoon $p, q \in \mathbf{Z}^+$. Merkitään symbolilla $R(p,q)$ pienintä sellaista lukua n, että jokaisella n-klikin viivojen värityksellä (kahdella värillä sinisellä ja punaisella) saadaan joko sininen p-klikki tai punainen q-klikki. Lukuja $R(p,q)$ sanotaan Ramseyn luvuiksi. Erityisesti $R(1,q) = 1$.

Esimerkki 4.3.2 Esimerkin 4.3.1 mukaan $R(3,3) = 6$.

Esimerkki 4.3.3 Suoraan määritelmän perusteella $R(p,q) = R(q,p)$.

Esimerkki 4.3.4 $R(2,q) = q$. Tarkastellaan $(q-1)$-klikkiä. Väritetään kaikki viivat punaisella värillä. Silloin ei ole sinistä 2-klikkiä eikä punaista q-klikkiä. Siis $R(2,q) > q-1$. Tarkastellaan q-klikkiä. Jos ainakin yksi viiva on sininen, niin saadaan sininen 2-klikki. Jos mikään viiva ei ole sininen, niin saadaan punainen q-klikki.

Lause 4.3.1 (Ramseyn lause) *Jokaista $p, q \in \mathbf{Z}^+$ kohti on olemassa $R(p,q)$.*

Tod. Sivuutetaan.

Huom. Lause 4.3.1 on tarkkaan ottaen Ramseyn lauseen erikoistapaus. Yleisempiin tuloksiin ei tässä puututa.

Lause 3.5.1, Chen p. 133

Harj.1 Todista, että $R(p,q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}$.
(Vihje: Sovella Lausetta 3.5.1 ja induktiota luvun $(p+q)$ suhteen.)

5 Seulaperiaate

5.1 Alkeistapaus

Kun lasketaan joukkoihin A tai B kuuluvien alkioiden lkm, voidaan toimia niin, että ensin lasketaan yhteen joukon A alkioiden lkm ja joukon B alkioiden lkm ja sen jälkeen vähennetään yhteisten alkioiden lkm (nimittäin ensimmäisessä vaiheessa yhteiset alkiot lasketaan kahteen kertaan). Matemaattisin symbolein ilmaistuna

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Jos A ja B ovat perusjoukon S osajoukkoja, niin joukkoihin A ja B kuulumattomien alkioiden lkm on

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

Esimerkki 5.1.1 Kuinka paljon on sellaisia n (≥ 4) bitin jonoja, jotka joko alkavat tai päättyvät kahteen ykköseen? Entä sellaisia, jotka eivät ala kahdella ykkösellä eivätkä pääty kahteen ykköseen?

5.2 Yleistys

Lause 5.2.1 *Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_n$ perusjoukon S osajoukkoja. Silloin*

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= \sum_{i=i}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \cdots \\
&\quad + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| + \cdots \\
&\quad + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.
\end{aligned}$$

Tod. Olkoon $x \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ mielivaltainen. Oletetaan, että x kuuluu m joukkoon, missä $m = 1, 2, \ldots, n$. Symmetrisyyden vuoksi voidaan olettaa, että $x \in A_1, \ldots, A_m$. Silloin oikealla puolella k. summassa x lasketaan mukaan

$$(-1)^{k+1} \binom{m}{k}$$

kertaa, kun $k \leq m$, ja ei yhtään kertaa, kun $k > m$. Siis yhteensä x lasketaan mukaan

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \binom{m}{k}$$

kertaa. On helppo todeta, että

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\binom{m}{k} = 1.$$

Näin ollen oikealla puolella jokainen alkio $x \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ lasketaan mukaan kaiken kaikkiaan täsmälleen kerran.

Jos $x \notin A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, niin sitä ei lasketa mukaan kertaakaan.

Seuraus Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_n$ perusjoukon S osajoukkoja. Silloin

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = |S| - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.$$

Tod. De Morganin kaavojen mukaan

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}.$$

Erotusperiaatteen mukaan

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|.$$

Yhdistämällä yo. kaavat ja lause 5.2.1 saadaan seuraus.

Huom. Lause 5.2.1 antaa niiden alkioiden lkm:n, joilla on jokin joukkojen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ilmaisemista ominaisuuksista. Seurauksessa taas lasketaan niiden alkioiden lkm, jotka eivät toteuta mitään joukkojen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ilmaisemista ominaisuuksista.

Harj. Kuinka paljon on sellaisia kirjainten *MATHISFUN* permutaatioita, joissa ei esiinny mikään sanoista *MATH, IS, FUN*.

Brualdi, p.159

Harj. Sellaisia joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ n-permutaaatioita π, jotka toteuttavat ehdon $\pi(i) \neq i \ \forall i$, sanotaan sekoituksiksi (engl. derangement). Todista, että niiden lkm D_n toteuttaa kaavan

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Harj. Todista, että D_n on lukua $n!/e$ lähinnä oleva kokonaisluku.

Harj. Määritä

$$\lim_{n \to \infty} \frac{D_n}{P(n, n)}.$$

Harj. Sijoitetaan n henkilölle tarkoitetut henkilökohtaiset, erilaiset viestit sattumanvaraisesti kirjekuoriin. Kuinka paljon on sellaisia vaihtoehtoja, joissa kukaan henkilö ei saa oikeaa viestiä?

5.3 Multijoukon kombinaatioista

Pykälässä 2.4 todettiin, että multijoukon $\{\infty \cdot a_1, \ldots, \infty \cdot a_n\}$ r-kombinaatioiden lkm on $\binom{r+n-1}{n-1}$. Tarkastelemme nyt esimerkin avulla tapausta, jossa toistoluvut ovat äärellisiä. Itse asiassa olennaista on se, että toistoluvut ovat $< r$.

Esimerkki 5.3.1 Mikä on multijoukon $\{5 \cdot a, 6 \cdot b, 7 \cdot c\}$ 15-kombinaatioiden lkm?

Ratkaisu Merkitään $M = \{5 \cdot a, 6 \cdot b, 7 \cdot c\}$, $M' = \{\infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c\}$. Edelleen merkitään

$$\begin{aligned}
S &= \{\text{joukon } M' \text{ 15-kombinaatiot}\},\\
A &= \{\text{joukon } M' \text{ 15-kombinaatiot, joissa ainakin 6 } a\text{:ta}\},\\
B &= \{\text{joukon } M' \text{ 15-kombinaatiot, joissa ainakin 7 } b\text{:tä}\},\\
C &= \{\text{joukon } M' \text{ 15-kombinaatiot, joissa ainakin 8 } c\text{:tä}\}.
\end{aligned}$$

Kysytty lkm on siis $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}|$.
Lauseen 5.2.1 seurauksen mukaan

$$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|.$$

Voidaan todeta, että

$$\begin{aligned}
|S| &= \binom{15+3-1}{2} = 136,\ |A| = \binom{(15-6)+3-1}{2} = 55,\\
|B| &= \binom{(15-7)+3-1}{2} = 45,\ |C| = \binom{(15-8)+3-1}{2} = 36,\\
|A \cap B| &= \binom{(15-6-7)+3-1}{2} = 6,\ |A \cap C| = \binom{(15-6-8)+3-1}{2} = 3,\\
|B \cap C| &= \binom{(15-7-8)+3-1}{2} = 1,\ |A \cap B \cap C| = 0.
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = 136 - 55 - 45 - 36 + 6 + 3 + 1 - 0 = 10.$$

Esimerkki 5.3.2 Yhtälön $x_1 + x_2 + x_3 = 15$, $x_1 \leq 5$, $x_2 \leq 6$, $x_3 \leq 7$, ratkaisujen lkm on sama kuin edellisen tehtävän vastaus.

Harj. Määritä multijoukon $\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$ 10-kombinaatioiden lkm
a) lauseen 5.2.1 seurauksen avulla, Brualdi, s.163
b) luettelemalla ne.

Harj. Tutki multijoukon $\{t_1 \cdot a, t_2 \cdot b\}$ r-kombinaatioiden lkm:ää.

5.4 Surjektioiden lkm

Lause 5.4.1 *Olkoon $|X| = m$ ja $|Y| = n$, missä $m \geq n$. Silloin surjektioiden lkm joukolta X joukolle Y on*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m.$$

Tod. Merkitään $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ ja $Y = \{y_1, y_2, \ldots y_n\}$. Olkoon

$$\begin{aligned} S &= \{f \mid f : X \to Y\}, \\ A_i &= \{f \in S \mid f(x) \neq y_i \ \forall x \in X\}, \ i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Silloin $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$ on kaikkien surjektioiden joukko, joten surjektioiden lkm saadaan lauseen 5.2.1 seurauksen avulla. Nyt

$|S| = n^m$,

$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (n-k)^m$ aina, kun $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$.

Summassa yli joukkojen $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, missä $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, on $\binom{n}{k}$ yhteenlaskettavaa. Siis saamme lauseen 5.4.1.

Harj. Mikä on injektioiden lkm joukolta X joukolle Y, kun $|X| = m$, $|Y| = n$ ja $m \leq n$?

Harj. Mikä on bijektioiden lkm joukolta X joukolle Y, kun $|X| = |Y| = n$?

Harj. Mikä on kuvausten lkm joukolta X joukolle Y, kun $|X| = m$ ja $|Y| = n$?

6 Rekursiiviset jonot

6.1 Määritelmä

Lukujono on ei-negatiivisten kokonaislukujen joukon reaaliarvoinen funktio. Lukujonon jäsenet ovat funktion f arvot $f(0), f(1), f(2), \ldots$

Usein tulkitaan, että lukujono on numeroituva ääretön järjestetty joukko (reaalilukuja). Sitä merkitään mm. seuraavilla tavoilla:

$a_0, a_1, a_2, \ldots,$

$(a_n)_{n=0}^{\infty},$

$(a_n),$

$a_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}.$

Lukujonon indeksi n ei aina käy läpi juuri arvoja $n = 0, 1, 2, \ldots$ Esimerkiksi usein $n = 1, 2, 3, \ldots$

Lukujono (a_n) on *rekursiivinen*, jos on olemassa sellainen n_0, että luvut $a_n \quad (n \geq n_0)$ saadaan lukujen $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ ja n funktiona, ts. a_n on muotoa

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0, n) \quad (n \geq n_0). \tag{6.1}$$

Yhtälöä (6.1) sanotaan rekursiiviseksi relaatioksi tai differenssiyhtälöksi. Esimerkiksi lukujono (a_n) on rekursiivinen, kun $a_0 = 2, a_1 = 1, a_n = 5a_{n-1} + a_{n-2}^3 \quad (n \geq 2)$.

Lukujono (a_n) on k. kertaluvun *lineaarinen* vakiokertoiminen rekursiivinen jono, jos

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + b_n \quad (n \geq k), \tag{6.2}$$

missä $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$ ja (b_n) on lukujono. Jos $b_n \equiv 0$, niin jonoa (a_n) sanotaan *homogeeniseksi*. Jonon jäseniä $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ sanotaan *alkuarvoiksi*. Esimerkiksi jono $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 4, a_n = a_{n-1} + 2a_{n-3} \quad (n \geq 3)$ on 3. kl lineaarinen homogeeninen vakiokertoiminen rekursiivinen jono.

Yhtälöä (6.2) sanotaan k. kl lineaariseksi vakiokertoimiseksi *differenssiyhtälöksi*. Yhtälön (6.2) *karakteristinen polynomi* on

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k.$$

Karakteristisen polynomin juurten ja alkuarvojen avulla saadaan jonon (a_n) termeille a_n eksplisiittinen lauseke (edellyttäen, että b_n on sopivaa muotoa). Tätä lauseketta sanotaan yhtälön (6.2) *ratkaisuksi*.

Tarkastelemme esimerkkinä 2. kl lineaarisen homogeenisen vakiokertoimisen differenssiyhtälön

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

ratkaisua. Olkoot α ja β karakteristisen polynomin juuret. Jos $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq \beta$, niin ratkaisu on muotoa

$$a_n = A\alpha^n + B\beta^n \quad (n \geq 0),$$

ja jos $\alpha = \beta \in \mathbf{R}$, niin ratkaisu on muotoa

$$a_n = A\alpha^n + Bn\alpha^n \quad (n \geq 0).$$

Kertoimet A ja B löydetään alkuarvojen avulla. Tapaukseen $\alpha, \beta \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ emme tässä puutu.

Esimerkiksi olkoon

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad a_0 = 2, a_1 = -2.$$

Silloin karakteristinen polynomi on $x^2 - 4x + 4$, joten a_n on muotoa

$$a_n = A2^n + Bn2^n.$$

Alkuarvojen perusteella $A = 2$ ja $B = -3$, joten

$$a_n = 2^{n+1} - 3n2^n.$$

6.2 Rekursiiviset jonot malleina

Rekursiivisia jonoja voidaan käyttää monien ilmiöiden mallintamisessa. Tässä pykälässä esitetään muutama esimerkki kombinatorisen probleeman mallintamisesta. Lisäksi pykälissä 6.3 - 6.5 esitellään kolme klassista kombinatorista esimerkkiä.

Esimerkki 6.2.1 Merkitköön a_n niiden tapojen lukumäärää, joilla luku n voidaan esittää lukujen 1, 2 ja 3 summana, kun lukujen järjestys otetaan huomioon. (Esim. $5 = 3+1+1$ ja $5 = 1+3+1$ ovat eri esityksiä.) Etsitään rekursiivinen relaatio jonolle (a_n).

Ratkaisu Voidaan todeta, että $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4$. Tarkastellaan termiä $a_n \quad (n \geq 4)$. Luvun n summaesitykset voidaan jakaa kolmeen erilliseen tapaukseen: 1. yhteenlaskettava on 1, 2 tai 3.

Jos 1. yhteenlaskettava on 1, niin n on muotoa $n = 1 + x$, missä x on luvun $n-1$ summaesitys. Esitys x voidaan muodostaa a_{n-1} tavalla. Sellaisia summaesityksiä, joissa 1. yhteenlaskettava on 2 (vastaavasti 3) on a_{n-2} (vastaavasti a_{n-3}). Siis summaperiaatteen nojalla

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \quad (n \geq 4).$$

Esimerkki 6.2.2 Olkoon a_n sellaisten n pituisten numerojonojen lkm, joissa on parillinen määrä nollia. Etsitään rekursiivinen relaatio jonolle (a_n).

Ratkaisu Selvästi $a_1 = 9$. Tarkastellaan, millä tavalla $(n-1)$-numeroisesta jonosta saadaan oikeanlainen n-numeroinen jono lisäämällä jonon alkuun yksi numero.

Tapaus 1. Olkoon $(n-1)$-numeroinen jono oikeaa muotoa. Silloin lisättävän numeron on oltava $\neq 0$. Siis tällä tavalla saatava numerojono voidaan muodostaa $9a_{n-1}$ tavalla.

Tapaus 2. Olkoon $n-1$-numeroinen jono vääränmuotoinen. Silloin lisättävän numeron on oltava $= 0$. Vääränmuotoisia $(n-1)$-numeroisia jonoja on $10^{n-1} - a_{n-1}$ kpl. Siis tällä tavalla saatavia jonoja on $1 \cdot (10^{n-1} - a_{n-1})$ kpl.

Kaikki jonot saadaan joko tapauksesta 1 tai tapauksesta 2 ja lisäksi tapaukset 1 ja 2 ovat erillisiä. Siis summaperiaatteen nojalla

$$a_n = 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1}) = 8a_{n-1} + 10^{n-1}.$$

Harj. Ratkaise yhtälö $a_n = ba_{n-1} + c \quad (n \geq 1), \quad a_0 = d$.

Harj. (Hanoin torni) Käytössäsi on tangot A, B ja C sekä n kiekkoa, joissa on reikä keskellä ja joiden halkaisijat ovat $1, 2, \ldots, n$ pituusyksikköä. Kiekot ovat tangossa A suuruusjärjestyksessä niin, että isoin on alimpana. Kiekot on siirrettävä tankoon B yksitellen siten, että missään vaiheessa isompi kiekko ei saa olla pienemmän päällä. Olkoon H_n tarvittavien siirtojen lkm. Määritä rekursiivinen relaatio jonolle (H_n).

Harj. Ratkaise edellisen tehtävän differenssiyhtälö.

Harj. Todista, että sekoitusten lkm D_n toteuttaa differenssiyhtälön

a) $D_n = (n-1)[D_{n-1} + D_{n-2}]$, $n \geq 2$,

b) $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$, $n \geq 1$.

6.3 Fibonaccin jono

Tarkastellaan probleemaa, jonka alunperin asetti Leonardo di Pisa (tunnetaan myös nimellä Fibonacci) 1200–luvulla. Oletetaan, että kanipari synnyttää uuden kaniparin kahden kuukauden ikäisenä, ja sen jälkeen kuukausittain taas uuden kaniparin. Nuori kanipari asetetaan saarelle 1. kuukauden alussa. Kuinka monta kaniparia saarella on n. kuukauden alussa? (Oletetaan, että kaneja ei kuole.)

Ratkaisu Merkitään kaniparien lkm:ää n. kuukauden alussa symbolilla F_n. Silloin $F_0 = 0, F_1 = 1$. Yleisesti n. kuukauden alussa saarella olevat kanit voidaan jakaa 2 erilliseen luokkaan: vastasyntyneet kanit (F_{n-2} kpl) ja vähintään kuukauden ikäiset kanit (F_{n-1} kpl). Siis kaneja on yhteensä $F_{n-1} + F_{n-2}$ kpl eli

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad F_0 = 0, F_1 = 1. \tag{6.3}$$

Tämä on 2. kl. lineaarinen homogeeninen vakiokertoiminen differenssiyhtälö. Ratkaisu on

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

missä $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$, $\beta = (1 - \sqrt{5})/2$.

Määritelmä Jonoa $(F_n)_{n=0}^{\infty}$, joka toteuttaa ehdon (6.3), sanotaan *Fibonaccin jonoksi.* Lukuja F_n sanotaan Fibonaccin luvuiksi.

Esimerkki 6.3.1 Kuinka paljon on sellaisia n bitin jonoja, joissa ei ole 2 peräkkäistä nollaa?

Ratkaisu Olkoon a_n kysytty lkm. Silloin $a_1 = 2$, $a_2 = 3$. Olkoon $n \geq 3$. Esimerkin bittijonot voidaan jakaa 2 erilliseen luokkaan: bittijonot, jotka päättyvät ykköseen (a_{n-1} kpl), ja bittijonot, jotka päättyvät nollaan (a_{n-2} kpl). Siis $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 3)$, joten

$$a_n = F_{n+2}.$$

Harj. Kuinka monella tavalla voidaan n (≥ 1) askelman raput käydä ylös, kun kulkija voi astua joko yhden tai kaksi askelmaa kerralla?

Harj. Kuinka monella tavalla positiivinen kokonaisluku n voidaan esittää ykkösten ja kakkosten summana, kun ykkösten ja kakkosten järjestys otetaan huomioon?

Harj. Kuinka paljon on sellaisia joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ permutaatiota, jotka toteuttavat ehdon $\pi(i) = j \Rightarrow \pi(j) = i$?

Esimerkki 6.3.2

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$$

Tod. Käytetään induktiota luvun n suhteen.

Jos $n = 0$, niin kaava on oikein. Oletetaan, että kaava on oikein, kun $n = m - 1$. Silloin

$$\sum_{k=0}^{m} F_k = \sum_{k=0}^{m-1} F_k + F_m = F_{m+1} - 1 + F_m = F_{m+2} - 1.$$

Harj.1 Todista, että

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^{n+1} \quad (n \geq 1).$$

Harj.2 Todista, että

$$F_{n+m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}.$$

Harj.3 Todista, että

$$F_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i}.$$

6.4 Catalanin luvut

Tutkitaan, kuinka monella tavalla tuloon $x_1 x_2 \cdots x_n$ voidaan asettaa sulut. Merkitään tätä lukumäärää symbolilla C_n. Lukuja C_n sanotaan *Catalanin luvuiksi* belgialaisen matemaatikon Eugene Catalanin (1814–1894) mukaan.

Selvästi $C_2 = 1$. Jos $n = 3$, niin sulut voidaan asettaa 2 tavalla: $((x_1x_2)x_3)$, $(x_1(x_2x_3))$. Siis $C_3 = 2$. Jos $n = 4$, niin sulut voidaan asettaa 5 tavalla: $(((x_1x_2)x_3)x_4)$, $((x_1(x_2x_3))x_4)$, $((x_1x_2)(x_3x_4))$, $(x_1(x_2(x_3x_4)))$ ja $(x_1((x_2x_3)x_4))$.

Yleisesti jokainen tulon $x_1x_2x_3x_4$ sulkujen asettaminen voidaan kirjoittaa muodossa (X_iY_{n-i}), missä X_i on tulon $x_1 \cdots x_i$ jokin sulkuesitys ja Y_{n-i} on tulon $x_{i+1} \cdots x_n$ jokin sulkuesitys. Kun i käy läpi luvut $1, 2, \ldots, n-1$ ja X_i ja Y_{n-i} käyvät läpi sulkuesityksensä, saadaan kaikki tulon $x_1x_2 \cdots x_n$ sulkuesitykset täsmälleen kerran. Tulon $x_1 \cdots x_i$ sulkuesityksiä on C_i kpl ja tulon $x_{i+1} \cdots x_n$ sulkuesityksiä C_{n-i} kpl. Tulo- ja summaperiaatten mukaan saadaan rekursio

$$C_n = \sum_{i=1}^{n-1} C_i C_{n-i}.$$

Voidaan todistaa, että

$$C_n = \frac{1}{n} \binom{2(n-1)}{n-1}.$$

Esimerkki 6.4.1 Olkoon $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ jono, jossa on n kpl lukuja 1 ja n kpl lukuja -1 ja jonka osittaissummat ovat ei-negatiiviset, ts.,

$$a_1 + \cdots + a_k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n). \tag{6.4}$$

Tällaisten jonojen lkm on C_{n+1}.

Tod. Tarkastellaan jonoja $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, joissa on n kpl lukuja $+1$ ja n kpl lukuja -1. Kutsumme jonoa $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ luvalliseksi, jos kaava (6.4) on voimassa, ja ei-luvalliseksi muulloin. Merkitään symbolilla L_n luvallisten jonojen lukumäärää ja symbolilla E_n ei-luvallisten jonojen lukumäärää. Kaiken kaikkiaan jonojen $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$

lkm on $\frac{(2n)!}{n!n!}$. Näin ollen

$$L_n + E_n = \frac{(2n)!}{n!n!}. \tag{6.5}$$

Lasketaan lkm E_n. Tarkastellan ei-luvallista jonoa $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$. Olkoon k_0 pienin sellainen luku, että

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_0} < 0.$$

Silloin

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_0 - 1} = 0, \qquad a_{k_0} = -1.$$

Näin ollen k_0 on pariton kokonaisluku.

Korvataan nyt termi a_i, $i = 1, 2, \ldots, k_0$, termillä $-a_i$ ja jätetään loput temit ennalleen. Näin saadaan jono $a_1', a_2', \ldots, a_{2n}'$. Koska k_0 on pariton, niin jonossa $a_1', a_2', \ldots, a_{2n}'$ on $n+1$ kpl lukuja $+1$ ja $n-1$ kpl lukuja -1. Tämä korvausprosessi on käännettävissä (Harj). Näin ollen sellaisten ± 1-jonojen lkm, joissa on $n+1$ kpl lukuja $+1$ ja $n-1$ kpl lukuja -1, on E_n.

Tästä seuraa, että

$$E_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}.$$

Nyt kaavan (6.5) nojalla

$$L_n = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}.$$

Tämä voidaan kirjoittaa (harj.) muodossa

$$L_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Näin olemme todistaneet esimerkin 6.4.1.

Harj. Todista, että jokaista ± 1-jonoa, jossa on $n+1$ kpl lukuja $+1$ ja $n-1$ kpl lukuja -1, vastaa esimerkin 6.4.1 ei-luvallinen jono.

Harj. Todista, että

$$\frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Esimerkki 6.4.2 Oletetaan, että $2n$ katsojaa jonottaa teatteriin. Heistä n katsojalla on yksi 50 mk:n raha kullakin ja lopuilla n katsojalla yksi 100 mk:n raha kullakin. Pääsymaksu on 50 mk. Kassa on alussa tyhjä. Kuinka monessa eri järjestyksessä ihmiset voivat mennä kassalle niin, että kassa pystyy aina antaamaan rahasta takaisin?

Ratkaisu Pidetään "50 mk:n henkilöitä" edellisen esimerkin lukuina 1 ja "100 mk:n henkilöitä" lukuina -1. Silloin osittaissummaehto tarkoittaa, että 50 mk:lla maksaneita on aina vähintään yhtä paljon kuin 100 mk:lla maksaneita. Siis tarvittessa vaihtoraha on aina annettavissa.

Tälläisia ± 1-jonoja on C_{n+1} (eli $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$) kpl. Näissä jonoissa "50 mk:n henkilöt" voidaan asettaa $n!$ järjestykseen, samoin "100 mk:n henkilöt". Siis eri järjestyksiä on $(n!)(n!)C_{n+1}$ eli

$$\frac{(2n)!}{n+1}.$$

Harj. Kuinka paljon on lyhimpiä reittejä pisteestä $(0,0)$ pisteeseen (n,n) niin, että neliön lävistäjää (xy-koordinaatiston suoraa $y = x$) ei ylitetä (mutta sivuta saa).

(Vast. $2C_{n+1} = 2\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$) ks. Brualdi, s 255.

Harj. Todista, että

$$C_{n+1} = \frac{4n-2}{n+1}C_n \quad (n \geq 2), \quad C_2 = 1.$$

Huom. Catalanin luvuilla on lisäksi paljon muita kombinatorisia tulkintoja, esim. n-solmuisten juurellisten binääripuiden lkm on C_{n+1}. Näihin tulkintoihin ei tässä puututa.

6.5 Bellin luvut

Bellin luvut B_n määritellään joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ (tai minkä tahansa n-alkioisen joukon) ositusten lukumääränä. Luvut ovat saaneet nimensä amerikkalaisen matemaatikon E. T. Bellin (1883–1960) mukaan. Esimerkiksi $B_2 = 2$, $B_1 = 1$. Erityisesti sovitaan, että $B_0 = 1$.

Lause 6.5.1 *Kun $n \geq 1$,*

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}.$$

Tod. Tarkastellaan joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ mielivaltaista ositusta P. Siinä on osa, joka sisältää luvun n, sanokaamme $A \cup \{n\}$. Joukko A on joukon $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ osajoukko. Osituksen P muut osat muodostavat joukon $\{1, 2, \ldots, n-1\} \setminus A$ osituksen P'. Ositus P' ja joukko A määräävät osituksen P yksikäsitteisesti: $P = P' \cup (\{A \cup \{n\}\})$. Kun jokaista lukua k kohti A käy läpi joukon $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ $(k-1)$-alkioiset osajoukot ja P' käy läpi kaikki joukon $\{1, 2, \ldots, n-1\} \setminus A$ ositukset, niin P käy läpi kaikki joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ ositukset täsmälleen kerran.

Joukko A voidaan valita $\binom{n-1}{k-1}$ tavalla ja ositus P voidaan valita B_{n-k} tavalla. Tulo- ja summaperiaatteen nojalla saadaan lauseen kaava.

Harj. Kuinka paljon on 3–alkioisen joukon osituksia? Mitkä ne ovat?

Harj. Mikä on n–alkioisen joukon ekvivalenssirelaatioiden lkm?

7 Stirlingin luvut

7.1 Stirlingin toiset luvut

Stirlingin toiset luvut $S(n,k)$ ilmaisevat joukon $\{1,2,\ldots,n\}$ sellaisten ositusten lkm:n, joissa on k osaa, missä $1 \leq k \leq n$. Luvut ovat saaneet nimensä James Stirlingin (1692–1770) mukaan. Erityisesti sovitaan, että $S(0,0)=1$, $S(n,0)=0$, kun $n>0$, ja $S(n,k)=0$, kun $k>n$.

Lause 7.1.1

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k) = B_n.$$

Tod Lause on suora seuraus lukujen $S(n,k)$ ja B_n määritelmistä.

Harj. Todista, että a) $S(n,n)=1$, $n \geq 0$, b) $S(n,2)=2^{n-1}-1$, $n \geq 2$, c) $S(n,n-1)=\binom{n}{2}$, $n \geq 2$.

Lause 7.1.2

$$S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1), \quad n \geq k \geq 1. \tag{7.1}$$

Tod Vasen puoli ilmaisee joukon $\{1,2,\ldots,n\}$ sellaisten ositusten lkm:n, joissa on k osaa. Joukon ositukset k osaan voidaan jakaa kahteen erilliseen tapaukseen:

1) Joukko $\{n\}$ on osituksen yksi osa. Silloin joukko $\{1,2,\ldots,n-1\}$ on jaettu $k-1$ osaan. Tällaisia osituksia on $S(n-1,k-1)$ kpl.

2) Joukko $\{n\}$ on jonkin osan aito osajoukko. Tällaiset ositukset voidaan muodostaa niin, että ositetaan joukko $\{1,2,\ldots,n-1\}$ k osaan ($S(n-1,k)$ vaihtoehtoa) ja sen jälkeen luku n liitetään johonkin näistä k osasta (k vaihtoehtoa). Siis tulosäännön mukaan tällaisia osituksia on $kS(n-1,k)$ kpl.

Nyt summaperiaatteen nojalla saadaan lauseen rekursio.

Erityisesti, jos $n \geq k = 1$, niin voidaan todeta, että rekursio on voimassa.

Huom. Rekursion 7.1 ja alkuehtojen perusteella voidaan luvut $S(n,k)$, $n \geq k \geq 1$, määrätä täydellisesti.

Lause 7.1.3 *Jos $n \geq k \geq 1$, niin*

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j} j^n. \tag{7.2}$$

Tod Oikean puolen summalauseke on surjektioiden lkm joukolta $\{1, 2, \ldots, n\}$ joukolle $\{1, 2, \ldots, k\}$. Näin ollen riittää todistaa, että surjektioiden lkm on $k!S(n, k)$.

Kaikki surjektiot voidaan konstruoida yksikäsitteisesti seuraavalla tavalla. Muodostetaan joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ ositus k osaan (voidaan tehdä $S(n, k)$ tavalla). Kuvataan osituksen 1. osan alkiot joukon $\{1, 2, \ldots, k\}$ alkiolle i_1. Kuvataan osituksen 2. osan alkiot joukon $\{1, 2, \ldots, k\} \setminus \{i_1\}$ alkiolle i_2 jne.

Kuvaukset voidaan tehdä $k!$ tavalla. Siis tuloperiaatteen mukaan surjektioita on $k!S(n, k)$ kpl.

Harj. Muuta kaava 7.2 sellaiseksi, että se on voimassa, kun $n \geq k \geq 0$.

7.2 Stirlingin ensimmäiset luvut

Joukon $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ permutaatio on syklinen, jos

$$\pi(x_i) = x_{i+1}, \text{ kun } i = 1, 2, \ldots, n-1, \text{ ja } \pi(x_n) = x_1.$$

Ts.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n & x_1 \end{pmatrix}$$

tai

$$x_1 \to x_2 \to x_3 \to \cdots \to x_n \to x_1.$$

Tällaista permutaatiota merkitään myös lyhyesti

$$(\ x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n\ ).$$

Merkintä

$$(\ x_2 \quad \cdots \quad x_n \quad x_1\ )$$

tarkoittaa samaa permutaatiota. Sama permutaatio voidaan kirjoittaa tällä periaatteella n eri tavalla.

Permutaatioiden π ja τ tulo $\pi\tau$ määritellään niin, että

$$(\pi\tau)(x) = \pi(\tau(x)).$$

Esimerkiksi

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,4\,5\,1\,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 4\,2\,5\,3\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 1\,4\,3\,5\,2 \end{pmatrix}.$$

Lause 7.2.1 *Joukon X jokainen permutaatio voidaan kirjoittaa joukon X erillisten osajoukkojen syklisten permutaatioiden tulona. Esitys on yksikäsitteinen (tekijöitten järjestystä ja syklien alkukohtaa lukuunottamatta).*

Todistus Todistus on algoritminen. Olkoon π joukon X permutaatio. Lauseen mukainen esitys saadaan seuraavalla algoritmilla:

> **While** Joukolla on vielä alkio, joka ei kuulu mihinkään sykliin.
> • Valitaan sellainen piste.
> • Muodostetaan sykli $(x\ \pi x \cdots \pi^{m-1}x)$, missä m on pienin sellainen luku ≥ 1, että $\pi^m x = x$.
> **Return** Syklinen tulo on konstruoitu.

Jaetaan todistus 4 osaan.

1) Todistetaan, että $(x\ \pi x \cdots \pi^{m-1}x)$ on syklinen. Selvästi riittää todistaa, että syklin alkiot ovat erisuuria. Jos näin ei ole, niin on olemassa sellaiset i ja j, että $\pi^i x = \pi^j x$, missä $0 \leq i < j < m$. Tällöin $\pi^{j-i}x = x$ (koska π on bijektio). Koska $1 \leq j - i < m$, niin tämä on ristiriidassa luvun m valinnan kanssa.

2) Todistetaan, että syklit ovat erillisiä joukkoja. Jos näin ei ole, niin on olemassa sellaiset x, y, i, j, että $\pi^i x = \pi^j y$, missä x on valittu ennen kuin y. Merk. $\pi^m y = y$. Silloin $m - j > 0$ ja $\pi^{i+m-j}x = \pi^m y = y$. Mutta tällöin y kuuluu x:stä saatavaan sykliin, joka on ristiriidassa sen kanssa, että x on valittu ennen y:tä.

3) Jokainen joukon alkio kuuluu johonkin sykliin.

4) Tähän mennessä on todistettu, että tulo koostuu joukon X erillisten osajoukkojen syklisistä permutaatioista ja että näiden osajoukkojen unioni on X. Todistetaan lopuksi, että tulo on sama kuin π.

   Olkoon $z \in X$. Silloin kohdan 2 nojalla on olemassa sellaiset x ja i, että $z = \pi^i x$. Silloin $\pi z = \pi^{i+1}x$. Siis z:n kuva saadaan alkion x määräämästä syklistä. Kohdan 2 nojalla z:n kuvaa ei saada muista sykleistä.

Esimerkki 7.2.1 Permutaatio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

voidaan kirjoittaa (1 3 4)(2 6)(5).

Määr. *Stirlingin ensimmäiset luvut* $s(n, k)$, missä $1 \leq k \leq n$, määritellään niin, että $(-1)^{n-k}s(n, k)$ on niiden joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ permutaatioiden lkm, joissa on k sykliä. Erityisesti sovitaan, että $s(0, 0) = 1$, $s(n, 0) = 0$, kun $n > 0$, ja $s(n, k) = 0$, kun $n < k$.

Huom. Kirjallisuudessa on erilaista käytäntöä lukujen $s(n, k)$ etumerkin suhteen.

Harj. Todista, että a) $s(n, n) = 1$, $n \geq 0$, b) $s(n, 1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, $n \geq 1$, c) $s(n, n-1) = \binom{n}{2}$, $n \geq 2$.

Lause 7.2.2 *Jos $n \geq 1$, niin*

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} s(n,k) = n!.$$

Tod. Yhtälön kummatkin puolet ilmaisevat joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ permutaatioiden lkm:n.

Lause 7.2.3 *Jos $n \geq k \geq 1$, niin*

$$s(n,k) = -(n-1)s(n-1,k) + s(n-1,k-1). \tag{7.3}$$

Tod. Todistetaan, että

$$|s(n,k)| = (n-1)|s(n-1,k)| + |s(n-1,k-1)|.$$

Vasen puoli ilmaise joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ sellaisten permutaatioiden lkm:n, joissa on k sykliä. Tällaiset permutaatiot voidaan jakaa 2 erilliseen luokkaan:

1) (n) on yksi sykli. Silloin loput $k-1$ sykliä muodostavat joukon $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ permutaation. Tällaisia permutaatioita on $|s(n-1,k-1)|$ kpl.

2) Luku n kuuluu johonkin joukon $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ permutaation k syklistä. Tällaisia joukon $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ permutaatioita on $|s(n-1,k)|$ kpl. Luku n voi sijaita $n-1$ eri paikassa. Siis tässä luokassa on $(n-1)|s(n-1,k)|$ permutaatiota.

Summaperiaatteen nojalla saadaan kaava 7.3.

Harj. Involuutiolla tarkoitetaan sellaista permutaatiota, jossa jokaisen syklin pituus on 1 tai 2. Olkoon $I(n)$ joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ involuutioiden lkm. Todista, että

$$I(n) = I(n-1) + (n-1)I(n-2), \quad n \geq 3.$$

Mitä ovat $I(1)$ ja $I(2)$?

7.3 Kertomafunktiosta

Jokaista positiivista kokonaislukua k kohti *kertomafunktio* $(x)_k$ määritellään kaavalla

$$(x)_k = x(x-1)\cdots(x-k+1).$$

Siis esimerkiksi $(x)_1 = x$ ja $(x)_2 = x(x-1) = x^2 - x$. Erityisesti sovitaan, että $(x)_0 = 1$. Huomaa, että jos $n \in \mathbf{Z}^+$, niin $(n)_n = n!$.

Kertomapolynomi on muotoa $\sum_{k=0}^{n} c_k (x)_k$, missä $c_n \in \mathbf{R}$. Jos $c_n \neq 0$, sanotaan, että kertomapolynomi on astetta n. Voidaan todistaa, että jokainen n asteen kertomapolynomi voidaan kirjoittaa n. asteen tavallisena polynomina ja päinvastoin.

Lause 7.3.1 *Jos $n \geq 0$, niin*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k.$$

Tod. Todistetaan väite induktiolla luvun n suhteen. Jos $n = 0, 1$, niin väite on oikea. Oletetaan, että väite on oikea, kun $n = m - 1$ (≥ 1). Silloin

$$\begin{aligned}
x^m = x \cdot x^{m-1} = x \sum_{k=0}^{m-1} S(m-1,k)(x)_k \\
&= [(x-k)+k] \sum_{k=0}^{m-1} S(m-1,k)(x)_k \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} S(m-1,k)(x)_{k+1} + \sum_{k=0}^{m-1} kS(m-1,k)(x)_k \\
&= \sum_{k=1}^{m} S(m-1,k-1)(x)_k + \sum_{k=1}^{m} kS(m-1,k)(x)_k \\
&= \sum_{k=1}^{m} S(m,k)(x)_k \\
&= \sum_{k=0}^{m} S(m,k)(x)_k.
\end{aligned}$$

Näin lause on todistettu.

Lause 7.3.2 *Jos $n \geq 0$, niin*

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k.$$

Tod. Harj. teht.

Huom. Voidaan todistaa, että

$$[S(i,j)]_{n\times n} = [s(i,j)]^{-1}_{n\times n}.$$

8 Generoiva funktio

8.1 Määritelmä

Lukujonon $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *generoiva funktio* on lauseke

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{8.1}$$

Joskus jonon $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ generoivaa funktiota merkitään lyhyesti symbolilla $a(x)$, ts.

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{8.2}$$

Kaavassa (8.2) symbolille x ei anneta lukuarvoja, vaan symbolin x potenssi ilmaisee kertoimensa paikan lukujonossa. Generoiva funktio on siis itse asiassa lukujonon uudenlainen esitysmuoto, jota on helppo käsitellä joissakin tilanteissa.

Jos lukujonon jokin jäsen a_k on $= 0$, niin termi $a_k x^k$ jätetään kaavan (8.2) oikeanpuoleisesta lausekkeesta pois, ja jos $a_k = 1$, niin silloin merkitään $a_k x^k = x^k$. Esimerkiksi jonon (3, 2, 0, 1, 0, 0,...) generoiva funktio on $3 + 2x + x^3$. Äärellinen jono $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ samaistetaan äärettömän jonon $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ kanssa.

Selvästi

$$a(x) = b(x) \Leftrightarrow a_k = b_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{8.3}$$

Generoivien funktioiden summa ja tulo ovat

$$a(x) + b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k, \tag{8.4}$$

$$a(x) b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}) x^k. \tag{8.5}$$

Tätä tuloa kutsutaan myös Cauchyn tuloksi. Abstraktin algebran kielellä voidaan sanoa, että generoivat funktiot muodostavat kommutatiivisen ykkösrenkaan summan ja tulon suhteen. Renkaan ykkösalkio on sarja 1 eli sarja $1 + 0x + 0x^2 + \cdots$. Sillä on ominaisuus $a(x)1 = 1a(x) = a(x)$ aina, kun $a(x)$ on generoiva funktio. Generoiva funktio $b(x)$ on generoivan funktion $a(x)$ inverssi, jos $a(x)b(x) = b(x)a(x) = 1$. Silloin merkitään $b(x) = a(x)^{-1} = 1/a(x)$. Voidaan todistaa, että generoivalla funktiolla $a(x)$ on inverssi, joss $a_0 \neq 0$.

Esimerkki 8.1.1

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k = \frac{1}{1 - ax},$$

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Yllä esiteltyä generoivan funktion tulkintaa, jossa symbolille x ei anneta lukuarvoja, sanotaan *algebralliseksi* lähestymistavaksi. Sarjaa 8.1 sanotaan silloin usein *muodolliseksi potenssisarjaksi*. Algebrallisen lähestymistavan etuna on, että silloin ei tarvitse tutkia lainkaan sarjan 8.1 suppenemista.

Generoiva funktio voidaan tulkita myös niin, että se on muuttujan x funktio $a(x)$. Tällöin edellytyksenä on, että sarja $a(x)$ suppenee jossakin origon ympäristössä. Tätä lähestymistapaa sanotaan *analyyttiseksi*. Sen etuna on, että silloin voidaan käyttää analyysin välineitä apuna. Koska kaavat 8.3, 8.4, 8.5 pitävät paikkansa myös suppeneville sarjoille $a(x)$ ja $b(x)$, niin algebrallista ja analyyttista lähestymistapaa voidaan käyttää rinnakkain.

8.2 Rekursiiviset jonot

Generoivien funktioiden avulla saadaan joissakin tapauksissa eksplisiittinen lauseke rekursiivisten jonojen termeille, ts. generoivilla funktioilla voidaan ratkaista rekursiivisia relaatioita eli differenssiyhtälöitä. Esitämme tästä esimerkin.

Esimerkki 8.2.1 Ratkaise diff.yhtälö

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 5^n \quad (n \geq 2),\ a_0 = 0,\ a_1 = 1,$$

generoivalla funktiolla.

Ratk. Määrätään jonon (a_n) generoiva funktio:

$$\begin{aligned} a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 5^n) x^n \\ &= x + 5x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 6x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 25x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n \\ &= x + 5xa(x) - 6x^2 a(x) + \frac{25x^2}{1-5x}. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$a(x)(1 - 5x + 6x^2) = x + \frac{25x^2}{1-5x} = \frac{20x^2 + x}{1-5x},$$

joten

$$a(x) = \frac{20x^2 + x}{(1 - 5x + 6x^2)(1 - 5x)} = \frac{20x^2 + x}{(1-2x)(1-3x)(1-5x)}.$$

Tämä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{22}{3}\left(\frac{1}{1-2x}\right) - \frac{23}{2}\left(\frac{1}{1-3x}\right) + \frac{25}{6}\left(\frac{1}{1-5x}\right) \\ &= \frac{22}{3}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - \frac{23}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + \frac{25}{6}\sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n. \end{aligned}$$

Koska generoiva funktio on yksikäsitteinen, niin

$$a_n = \frac{22}{3}2^n - \frac{23}{2}3^n + \frac{25}{6}5^n.$$

Harj. Määritä Fibonaccin jonon generoiva funktio.

Harj. Ratkaise differenssiyhtälö

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 2),\ a_0 = -1,\ a_1 = -2,$$

generoivan funktion avulla.

8.3 Multijoukon kombinaatioista

Pykälässä 2.4 tarkasteltiin äärettömän toistoluvun multijoukkojen kombinaatioiden lkm:ää ja pykälässä 5.3 äärellisen toistoluvun multijoukkojen kombinaatioiden lkm:ää. Tässä pykälässä todetaan, että generoivalla funktiolla voidaan tutkia kumpaakin tapausta.

Tutkitaan aluksi multijoukon $\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \ldots, \infty \cdot a_n\}$ r-kombinaatioiden lkm:ää. Tarkastellaan potenssia

$$(1 + x + x^2 + \cdots)^n. \tag{8.6}$$

Se voidaan kirjoittaa muodossa

$$\left(\sum_{e_1=0}^{\infty} x^{e_1}\right)\left(\sum_{e_2=0}^{\infty} x^{e_2}\right)\cdots\left(\sum_{e_n=0}^{\infty} x^{e_n}\right). \tag{8.7}$$

Generoivien funktioiden tulon mukaan

$$\left(\sum_{e_1=0}^{\infty} x^{e_1}\right)\left(\sum_{e_2=0}^{\infty} x^{e_2}\right)\cdots\left(\sum_{e_n=0}^{\infty} x^{e_n}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r, \tag{8.8}$$

missä

$$a_r = \sum_{\substack{e_1+e_2+\cdots e_n=r \\ e_1,e_2,\ldots,e_n\geq 0}} 1.$$

Näin ollen a_r on yhtälön $e_1 + e_2 + \cdots + e_n = r$, $e_1, e_2, \ldots, e_r \geq 0$, ratkaisujen lkm, ts. a_r on multijoukon $\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \ldots, \infty \cdot a_n\}$ r-kombinaatioiden lkm. Tulossa

(8.7) potenssin x^{e_i} valinta tarkoittaa, että multijoukon $\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \ldots, \infty \cdot a_n\}$ r-kombinaatioon valitaan e_i kpl alkioita a_i. Koska summa yli e_i:n käy nollasta äärettömään, alkioiden a_i määrälle ei ole rajoituksia.

Olemme siis todistaneet, että jos a_r on multijoukon $\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \ldots, \infty \cdot a_n\}$ r-kombinaatioiden lkm, niin jonon (a_r) generoiva funktio on

$$\begin{aligned} a(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)^n \\ &= \frac{1}{(1-x)^n} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{-n}{r} x^r. \end{aligned}$$

Koska $(-1)^r \binom{-n}{r} = \binom{r+n-1}{n-1}$, olemme päätyneet samaan tulokseen kuin pykälässä 5.3.

Olkoon a_r nyt äärellisen toistoluvun multijoukon $\{m_1 \cdot a_1, m_2 \cdot a_2, \ldots, m_n \cdot a_n\}$ r-kombinaatioiden lkm. Silloin jonon (a_r) generoiva funktio on

$$\begin{aligned} a(x) &= \left(\sum_{e_1=0}^{m_1} x^{e_1}\right)\left(\sum_{e_2=0}^{m_2} x^{e_2}\right)\cdots\left(\sum_{e_n=0}^{m_n} x^{e_n}\right) \\ &= \frac{(1-x^{m_1+1})(1-x^{m_2+1})\cdots(1-x^{m_n+1})}{(1-x)^n}. \end{aligned}$$

Tarkastellaan esimerkkinä multijoukon $\{5 \cdot a, 6 \cdot b, 7 \cdot c\}$ r-kombinaatioiden lkm:ää a_r. Generova funktio on

$$\begin{aligned} a(x) &= (1 + x + \cdots + x^5)(1 + x + \cdots + x^6)(1 + x + \cdots + x^7) \\ &= 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + 21x^5 + 27x^6 + 32x^7 + 35x^8 + 36x^9 \\ &\quad + 35x^{10} + 32x^{11} + 27x^{12} + 21x^{13} + 15x^{14} + 10x^{15} + 6x^{16} + 3x^{17} + x^{18}. \end{aligned}$$

(Polynomin tulo on helppo laskea Mathematica-ohjelmalla.) Esimerkiksi 15-kombinaatioiden lkm on 10 (vrt. esim. 5.3.1).

Generoivan funktion avulla multijoukkojen r-kombinaatioille on helppo asettaa rajoituksia.

Esimerkki 8.3.1 Olkoon a_r multijoukon $\{5 \cdot a, 6 \cdot b, 7 \cdot c\}$ sellaisten r-kombinaatioiden lkm, joissa alkiota c on kolmella jaollinen määrä. Silloin jonon (a_r) generoiva funktio on

$$\begin{aligned} a(x) &= (1 + x + \cdots + x^5)(1 + x + \cdots + x^6)(1 + x^3 + x^6) \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + 9x^5 + 11x^6 + 12x^7 + 13x^8 + 13x^9 + 12x^{10} \\ &\quad + 11x^{11} + 9x^{12} + 7x^{13} + 5x^{14} + 3x^{15} + 2x^{16} + x^{17}. \end{aligned}$$

Esimerkiksi 15-kombinaatioiden lkm on 3 .

Esimerkki 8.3.2 Olkoon a_r multijoukon $\{5 \cdot a, 6 \cdot b, 7 \cdot c\}$ sellaisten r-kombinaatioiden lkm, joissa alkion a lkm on aina eri kuin 4. Silloin jonon (a_r) generoiva funktio on

$$\begin{aligned} a(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^5)(1 + x + \cdots + x^6)(1 + x + \cdots + x^7) \\ &= 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 14x^4 + 19x^5 + 24x^6 + 28x^7 + 30x^8 + 30x^9 + 28x^{10} \\ &\quad + 25x^{11} + 21x^{12} + 16x^{13} + 11\,x^{14} + 7x^{15} + 4x^{16} + 2x^{17} + x^{18}. \end{aligned}$$

Esimerkiksi 15-kombinaatioiden lkm on 7.

Harj. Mikä on multijoukon $\{5 \cdot a, 6 \cdot b, 7 \cdot c\}$ 12-kombinaatioiden lkm?

Harj. Mikä on multijoukon $\{5 \cdot a, 6 \cdot b, 4 \cdot c, 3 \cdot d\}$ r-kombinaatioiden lkm:n generoiva funktio? Mikä on 12-kombinaatioden lkm?

Harj. Olkoon a_r multijoukon $\{m_1 \cdot a_1, m_2 \cdot a_2, \ldots, m_n \cdot a_n\}$ sellaisten r-kombinaatioiden lkm, joissa alkiota a_1 on parillinen määrä. Mikä on jonon (a_r) generoiva funktio?

Harj. Olkoon a_r multijoukon $\{m_1 \cdot a_1, m_2 \cdot a_2, \ldots, m_n \cdot a_n\}$ sellaisten r-kombinaatioiden lkm, joissa alkiota a_1 on vähintään yksi kpl. Mikä on jonon (a_r) generoiva funktio?

8.4 Luvun ositus

Positiivisen kokonaisluvun n *ositus* on luvun n esitys positiivisten kokonaislukujen summana, missä sama luku voi esiintyä monta kertaa ja missä yhteenlaskettavien järjestyksellä ei ole merkitystä.

Esimerkki 8.4.1 Luvun 4 ositukset ovat:

$$1 + 1 + 1 + 1, \quad 1 + 1 + 2, \quad 1 + 3, \quad 2 + 2, \quad 4.$$

Ositus $1 + 1 + 2$ on sama kuin ositukset $1 + 2 + 1$, $2 + 1 + 1$ ja ositus $1 + 3$ on sama kuin ositus $3 + 1$.

Olkoon a_n luvun n ositusten lkm. Olkoon e_k luvun k lkm osituksessa, missä $k = 1, 2, \ldots, n$. Silloin a_n on yhtälön

$$1e_1 + 2e_2 + \cdots + ne_n = n, \quad e_1, e_2, \ldots, e_n \geq 0,$$

ratkaisujen $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ lkm. Itse asiassa tässä on kysymys multijoukon $\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \ldots, \infty \cdot a_n\}$ sellaisten n-kombinaatioiden lkm:stä, joissa alkioiden a_k lkm on luvun k monikerta $\quad (k = 1, 2, \ldots, n)$.

Jonon (a_n) generoiva funktio on

$$a(x) = \left(\sum_{e_1=0}^{\infty} x^{e_1}\right)\left(\sum_{e_2=0}^{\infty} x^{2e_2}\right)\cdots\left(\sum_{e_k=0}^{\infty} x^{ke_k}\right)\cdots \tag{8.9}$$

Tässä tulossa potenssin x^{ke_k} valinta tarkoittaa, että lukua k on osituksessa e_k kpl. Olkoon n nyt kiinteä. Etsitään a_n generoivan funktion avulla. Koska lukua 1 voidaan käyttää korkeintaan n kpl, niin kaavan (8.9) summa yli indeksin e_1 voidaan rajoittaa arvoihin $e_1 = 0, 1, \ldots, n$. Yleisemmin summa yli indeksin e_k voidaan rajoittaa arvoihin $e_k = 0, 1, \ldots, \lfloor n/k \rfloor$. Jos erikoisesti $k \geq n+1$, niin $e_k = 0$. Siis tällöin summat ovat $= 1$, joten ne voidaan jättää tulosta pois. Näin ollen a_n on polynomin

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{e_k=0}^{\lfloor n/k \rfloor} x^{ke_k}\right) \tag{8.10}$$

potenssin x^n kerroin.

Esimerkki 8.4.2 Olkoon $n = 4$. Silloin (8.10) on muotoa

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x^2 + x^4)(1 + x^3)(1 + x^4). \tag{8.11}$$

Kun tulo kerrotaan auki, saadaan

$$\begin{aligned} &1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 5x^5 + 6x^6 + 7x^7 + 7x^8 \\ &+ \quad 6x^9 + 5x^{10} + 5x^{11} + 3x^{12} + 2x^{13} + x^{14} + x^{15}, \end{aligned}$$

joten luvun 4 ositusten lkm on 5. Esimerkiksi ositusta $1 + 1 + 2$ vastaa kertolasku $x^2 \cdot x^2 \cdot 1 \cdot 1$, jossa ensimmäinen x^2 on valittu summasta $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, toinen x^2 on valittu summasta $1 + x^2 + x^4$ ja ykköset valittu summista $1 + x^3$ ja $1 + x^4$.

Harj. Mikä kertolasku vastaa ositusta $1 + 1 + 1 + 1$?

Harj. Mitä ositusta vastaa kertolasku $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x^4$?

Generoivien funktioiden avulla osituksille on helppo asettaa rajoituksia.

Esimerkki 8.4.3 Olkoon a_n luvun n sellaisten ositusten lkm, joissa kaikki osat ovat erisuuria. Siis esimerkiksi luvun 4 tällaiset ositukset ovat $1 + 3$ ja 4. Silloin jonon (a_n) generoiva funktio on

$$a(x) = (1 + x)(1 + x^2)\cdots(1 + x^k)\cdots$$

Harj. Kuinka monella tavalla luku 7 voidaan esittää erisuurten positiivisten kokonaislukujen summana? Ratkaise tehtävä a) generoivalla funktiolla, b) luettelemalla ositukset.

Esimerkki 8.4.4 Olkoon a_n luvun n sellaisten ositusten lkm, joissa lukua k käytetään korkeintaan m_k kertaa. Silloin jono (a_n) gf on

$$a(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{e_k=0}^{m_k} x^{ke_k}.$$

Huomaa, että tässä m_k voi olla äärellinen tai ääretön.

Harj. Kuinka paljon on sellaisia luvun 5 osituksia, joissa lukua 3 ei käytetä lainkaan? Ratkaise tehtävä a) generoivalla funktiolla, b) luettelemalla ositukset.

Harj. Kuinka monella tavalla luvut $1, 2, \ldots, 10$ voidaan esittää lukujen $1, 2$ ja 3 summina, kun luku 1 voi esiintyä summassa korkeintaan kerran?

Harj. (h) Olkoon a_n luvun n sellaisten ositusten lkm, joissa kaikki osat ovat a) parittomia, b) parillisia, c) neliöitä, d) parittomia ja erisuuria, e) parillisia ja erisuuria, f) erisuuria neliöitä. Mikä on jonon (a_n) generoiva funktio?

Harj. Osoita, että harjoituksen h(a)ja esimerkin 8.4.4 generoivat funktiot ovat samat. Mitä silloin voidaan päätellä vastaavien ositusten lkm:istä?

Palaamme vielä luvun n rajoittamattomiin osituksiin. Niiden lkm:ää merkitään kirjallisuudessa usein symbolilla $p(n)$. Erityisesti sovitaan, että $p(0) = 1$.

Lause 8.4.1 *Jonon* $(p(n))_{n=0}^{\infty}$ *gf on*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

Harj. Todista lause 8.4.1 kaavan (8.9) avulla.

Osituksia voidaan havainnollistaa Ferresin diagrammilla (N. Ferres (1829–1903)). Esimerkiksi luvun 7 osituksen $4 + 2 + 1$ diagrammi on

$$\begin{matrix} * & * & * & * \\ * & * & & \\ * & & & \end{matrix}$$

Sen transpoosi on

$*$ $*$ $*$
$*$ $*$
$*$
$*$

joka vastaa ositusta $3+2+1+1$.

On helppo todeta, että osituksen Ferresin diagrammi on yksikäsitteinen ja että diagrammin transpoosin transpoosi on alkuperäinen diagrammi.

Ferresin diagrammin ja sen transpoosin avulla on helppo nähdä, että jokaista luvun n k-osaista ositusta vastaa yksikäsitteinen ositus, jonka suurin osa on k, ja päinvastoin. Näin voimme päätellä seuraavan lauseen.

Lause 8.4.2 *Olkoon $\beta_k(n)$ luvun n sellaisten ositusten lkm, joissa yhteenlaskettavia on k kpl, ja olkoon $\gamma_k(n)$ luvun n sellaisten ositusten lkm, joissa suurin yhteenlaskettava on $= k$. Silloin $\beta_k(n) = \gamma_k(n)$.*

Esimerkki 8.4.5 Luvun 5 3-osaiset ositukset ovat $3+1+1$ ja $2+2+1$. Näiden "transpoosit" ovat $3+1+1$ ja $3+2$.

Harj. Mitkä ovat luvun 6 3-osaiset ositukset ja niiden "transpoosit"?

Seuraus. Olkoon $p_k(n)$ luvun n sellaisten ositusten lkm, joissa yhteenlaskettavien lkm on $\leq k$, ja olkoon $q_k(n)$ luvun n sellaisten ositusten lkm, joissa suurin yhteenlaskettava on $\leq k$. Silloin $p_k(n) = q_k(n)$.

Tod. Seuraa suoraan lauseesta 8.4.2.

Harj. Mitkä ovat jonojen $\{\beta_k(n)\}_{n=0}^{\infty}$ ja $\{\gamma_k(n)\}_{n=0}^{\infty}$ generoivat funktiot?

Harj. Mitkä ovat jonojen $\{p_k(n)\}_{n=0}^{\infty}$ ja $\{q_k(n)\}_{n=0}^{\infty}$ generoivat funktiot?

Harj. Todista, että jonon $\{p_k(n)\}_{n=0}^{\infty}$ generoiva funktio toteuttaa relaation

$$(1-x^k)P_k(x) = P_{k-1}(x).$$

Harj. Todista, että

$$p_k(n) - p_k(n-k) = p_{k-1}(n)$$

a) edellisen harjoituksen perusteella,
b) kombinatorisesti tulkiten.

Esimerkki 8.4.6 Olkoon a_n niiden tapojen lkm, joilla n identtistä esinettä voidaan asettaa 3 identtiseen laatikkon niin, että mikään laatikoista ei jää tyhjäksi. Mikä on jonon (a_n) generoiva funktio?
Ratk. Selvästi a_n on luvun n ositusten lkm 3 osaan. Täten, lauseen 8.4.2 mukaan, a_n on sellaisten ositusten lkm, joissa luku 3 on suurin osa. Näin ollen

$$A(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(x^3 + x^6 + \cdots) = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}.$$

Harj. Olkoon a_n niiden tapojen lkm, joilla n identtistä esinettä voidaan asettaa 3 identtiseen laatikkon, kun laatikko saa jäädä myös tyhjäksi. Mikä on jonon (a_n) generoiva funktio?

Harj. Olkoon a_r niiden tapojen lkm, joilla r identtistä esinettä voidaan asettaa m identtiseen laatikkoon niin, että mikään laatikoista ei jää tyhjäksi. Mikä on jonon (a_r) generoiva funktio?

Harj. Kuinka monella tavalla 12 identtistä esinettä voidaan asettaa 3 identtiseen laatikkoon niin, että mikään laatikoista ei jää tyhjäksi?

Harj. Olkoon a_r niiden tapojen lkm, joilla r identtistä esinettä voidaan asettaa m identtiseen laatikkon, kun laatikko saa jäädä myös tyhjäksi. Mikä on jonon (a_r) generoiva funktio?

Harj. Kuinka monella tavalla 12 identtistä esinettä voidaan asettaa 3 identtiseen laatikkoon, kun laatikko saa jäädä myös tyhjäksi?

9 Latinalaiset neliöt

9.1 Määritelmä

Latinalainen neliö on $n \times n$-matriisi, jonka jokainen rivi ja jokainen sarake sisältää luvut $1, 2, \ldots, n$ täsmälleen kerran.

Lukua n sanotaan latinalaisen neliön *kertaluvuksi.*

Esimerkki 9.1.1 Matriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

on 3. kertaluvun latinalainen neliö.

Edellisen esimerkin perusteella voidaan todeta, että jokaista lukua n kohti on olemassa ainakin yksi n. kertaluvun latinalainen neliö.

Latinalainen neliö voidaan tulkita esimerkiksi niin, että kaksi n pelaajan tennisjoukkuetta A ja B kohtaavat niin, että kummankin joukkueen kaikki pelaajat kohtaavat toisensa kaksinpelissä täsmälleen kerran. Silloin latinalaisen neliön (i, j)-elementti kertoo monennellako pelikierroksella joukkueen A pelaaja a_i kohtaa joukkueen B pelaajan b_j, kun joukkueen A pelaajat ovat $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ja vastaavat joukkueen B pelaajat ovat $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Esimerkiksi edellisen esimerkin latinalaisen neliön mukaan turnauksen 1. kierroksella peliparit ovat a_1 vs. b_1, a_2 vs. b_2 ja a_3 vs. b_3. Turnauksen 2. kierroksen peliparit ovat a_1 vs. b_2, a_2 vs. b_3 ja a_3 vs. b_1. Mitkä ovat 3. kierroksen peliparit?

Huom. Latinalaisia neliöitä käytettiin aluksi tilastollisessa suunnittelussa. Siihen ei tässä puututa.

Harj. Kirjoita jokin muu 3. kertaluvun latinalainen neliö kuin esimerkissä 9.1.1.

Harj. a) Kirjoita 5. kertaluvun latinalainen neliö, joka on analoginen esimerkin 9.1.1 kanssa.
b) Mitkä ovat silloin 4. kierroksen peliparit?

Huom. Joskus latinalaisen neliön elementit otetaan joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ sijasta jostakin muusta n-alkioisesta joukosta.

9.2 Erillisten edustajien systeemi

Olkoon $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ joukkoperhe, tarkemmin sanoen järjestetty kokoelma joukkoja. Sen *erillisten edustajien systeemi* (EES) on sellainen n-vektori $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, että

a) $x_i \in A_i$, kun $i = 1, 2, \ldots, n$,

b) $x_i \neq x_j$, kun $i \neq j$.

(Englannin kielessä käytetään sanontaa ”A system of distinct representatives” tai lyhyesti ”SDR”.)

Esimerkki 9.2.1 Olkoon $A_i = \{1, 2, \ldots, i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Silloin perheen $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ ainoa EES on n-vektori $(1, 2, \ldots, n)$.

Esimerkki 9.2.2 Olkoon $A_i = \{0, 1, \ldots, i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Silloin esimerkiksi vektorit $(0, 1, 2, \ldots, n-1)$ ja $(1, 2, \ldots, n)$ ovat kumpikin EES:iä.

Harj. Kuinka monta EES:ää on esimerkin 9.2.2 joukkoperheellä?

Esimerkki 9.2.3 Olkoon $A_1 = \{1\}$, $A_i = \{1, 2, \ldots, i-1\}$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Silloin perheellä $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ ei ole EES:ää, kun $n > 1$.

Olkoon $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, ts. J on joukko indeksejä. Määritellään

$$A(J) = \bigcup_{j \in J} A_j.$$

Erityisesti sovitaan, että $A(\emptyset) = \emptyset$.

Esimerkki 9.2.4 Esimerkkien 9.2.1 ja 9.2.2 joukoille $A(J) = A_{\max(J)}$, missä $\max(J)$ on joukon J suurin alkio.

Huom. Jos perheellä $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ on EES, niin

$$|A(J)| \geq |J| \tag{HC}$$

aina, kun $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Nimittäin kuvaus $f : J \to A(J)$, $f(j) = x_j$ $(\in A_j)$, on injektio.
Ehtoa (HC) sanotaan *Hallin ehdoksi* (Hall's condition). Jos $|A(J)| = |J|$, niin indeksijoukkoa J sanotaan *kriittiseksi*.

Esimerkki 9.2.5 a) Jos esimerkissä 9.2.1 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, niin $|A(J)| = |J|$. Itse asiassa silloin $A(J) = J$. Jos $J = \{k\}$ $(k > 1)$, niin $|A(J)| = k$ ja $|J| = 1$ ja siis $|A(J)| > |J|$. On helppo todeta, että ehto (HC) on voimassa esimerkissä 9.2.1.
b) Jos esimerkissä 9.2.3 $J = \{1, 2\}$, niin $|A(J)| = 1$ ja $|J| = 2$. Siis $|A(J)| < |J|$. Näin ollen Hallin ehto (HC) ei ole voimassa.
c) Huomaa, että esimerkin 9.2.1 joukoilla on EES, kun taas esimerkin 9.2.3 joukoilla ei sellaista ole.

Seuraavassa lauseessa todistetaan, että Hallin ehto (HC) on välttämätön ja riittävä ehto EES:n olemassaololle. Lausetta kutsutaan *Hallin lauseeksi*.

Lause 9.2.1 *Äärellisten joukkojen perheellä $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ on EES, jos ja vain jos*

$$|A(J)| \geq |J| \tag{HC}$$

aina, kun $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.

Tod. Aikaisemmin on todettu Hallin ehdon (HC) välttämättömyys (siis suunta $\Rightarrow$). Todistetaan nyt riittävyys (eli suunta $\Leftarrow$). Oletetaan, että (HC) on voimassa. Väitetään, että silloin EES on olemassa. Edetään induktiolla joukkojen lkm:n n suhteen.
Jos $n = 1$, niin (HC) takaa, että joukossa A_1 on ainakin 1 alkio. Tämä alkio kelpaa edustajaksi.

Oletetaan, että väite on oikein, kun joukkoja on vähemmän kuin n kpl. Jaetaan EES:n olemassaolon todistus kahteen osaan.

Osa 1. Joukoista J on kriittinen vain $J = \emptyset$ ja mahdollisesti $J = \{1, 2, \ldots, n\}$. Olkoon x_n joukon A_n jokin alkio. (Huomaa, että (HC):n mukaan joukossa A_n on ainakin yksi alkio.) Määritellään $A_j^{'} = A_j \setminus \{x_n\}$, kun $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Todistetaan, että perhe $(A_1^{'}, A_2^{'}, \ldots, A_{n-1}^{'})$ toteuttaa Hallin ehdon (HC). Oletetaan, että $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\},\ J \neq \emptyset$. Silloin joko $A^{'}(J) = A(J)$ tai $A^{'} = A(J) \setminus \{x_n\}$. Näin ollen

$$|A^{'}(J)| \geq |A(J)| - 1.$$

Koska J ei ole kriittinen, niin $|A(J)| > |J|$. Täten

$$|A^{'}(J)| \geq |J|.$$

Siis perhe $(A_1^{'}, A_2^{'}, \ldots, A_{n-1}^{'})$ toteuttaa Hallin ehdon (HC). Induktio-olettauksen nojalla perheellä $(A_1^{'}, A_2^{'}, \ldots, A_{n-1}^{'})$ on EES, sanokaamme $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. Koska $x_n \in A_n$ ja x_n eroaa alkioista $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, niin n-vektori $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ muodostaa perheen $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ EES:n. Näin osa 1 on todistettu.

Osa 2. Oletetaan, että jokin joukko J on kriittinen, missä $J \neq \emptyset,\ \{1, 2, \ldots, n\}$. Valitaan näistä joukoista J minimaalinen. Silloin perhellä $(A_j : j \in J)$ on EES induktio-olettamuksen nojalla, koska $|J| < n$. Olkoon $(x_j : j \in J)$ tällainen EES. Merkitään $A_i^* = A_i \setminus A(J)$, kun $i \notin J$. Todistetaan, että perhe $(A_i^* : i \notin J)$ toteuttaa Hallin ehdon (HC). Olkoon K perheen $(A_i^* : i \notin J)$ mielivaltainen indeksijoukko ts. $K \cap J = \emptyset$. Silloin

$$A^*(K) = A(J \cup K) \setminus A(J). \qquad (*)$$

Koska $A(J \cup K) \supseteq A(J)$, niin

$$|A^*(K)| = |A(J \cup K)| - |A(J)|.$$

Hallin ehdon (HC) nojalla $|A(J \cup K)| \geq |J \cup K|$ ja joukon J kriittisyyden nojalla $|A(J)| = |J|$. Näin ollen

$$|A^*(K)| \geq |J \cup K| - |J| = |K|.$$

Nyt olemme todistaneet, että perhe $(A_i^* : i \notin J)$ toteuttaa Hallin ehdon (HC). Induktio-olettamuksen mukaan perheellä $(A_i^* : i \notin J)$ on EES, sanokaamme $(x_i : i \notin J)$.

Yhdistämällä vektorit $(x_j : j \in J)$ ja $(x_i : i \notin J)$ saamme perheelle $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ EES:n. Näin ollen osa 2 on todistettu. $\square$

Harj. Todista, lauseen 9.2.1 todistuksen kaava $(*)$.

(**Harj.** Todista, että lauseen 9.2.1 todistuksen perhe $(A_1', A_2', \dots, A_{n-1}')$ toteuttaa Hallin ehdon (HC).)

(**Harj.** Todista, että lauseen 9.2.1 todistuksen perhe $(A_i^* : i \notin J)$ toteuttaa Hallin ehdon (HC).)

Huom. Hallin lauseelle voidaan antaa seuraavanlainen tulkinta. Tulkitaan, että indeksijoukko $\{1, 2, \dots, n\}$ merkitsee joukkoa tyttöjä ja joukot $A_1, A_2, \dots, A_n$ merkitsevät poikajoukkoja niin, että tyttö j tuntee joukon A_j pojat, $j = 1, 2, \dots, n$. Silloin kaikilla tytöillä on mahdollisuus mennä naimisiin tuntemansa pojan kanssa, jos ja vain jos jokainen k tytön joukko ($k = 1, 2, \dots, n$) tuntee yhteensä vähintään k poikaa ($k = |J| \leq A(J)$). Tämän johdosta Hallin lausetta kutsutaan myös Hallin avioliittolauseeksi (Hall's Marriage Theorem).

Lause 9.2.2 *Oletetaan, että perhe $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ toteuttaa Hallin ehdon (HC) ja että $|A_i| \geq r$ aina, kun $i = 1, 2, \dots, r$. Silloin erilaisten EES:ien lkm on vähintään*

$$\begin{cases} r! & \text{jos} \quad r \leq n, \\ r(r-1)\cdots(r-n+1) & \text{jos} \quad r > n. \end{cases} \tag{9.1}$$

Tod. Sovelletaan induktiota luvun n suhteen.

Jos $n = 1$, niin joukkoja on yksi ja siinä on vähintään r alkiota. Jokainen näistä alkioista kelpaa edustajaksi. Siis kaava (9.1) on voimassa.

Oletetaan, että lause on oikein, kun joukkoja on vähemmän kuin n. Jaetaan tarkastelu kahteen osaan lauseen 9.2.1 todistuksen mukaisesti.

Osa 1. Edustaja x_n voidaan valita vähintään r tavalla. Jokaista edustajan x_n valintaa kohti perhe $(A_1', A_2', \dots, A_{n-1}')$ toteuttaa ehdon (HC) ja koostuu $n-1$ joukosta, joiden koko on $\geq r-1$. Näin ollen induktio-olettamuksen nojalla perheen $(A_1', A_2', \dots, A_{n-1}')$ EES:ien lkm on vähintään

$$\begin{cases} (r-1)! & \text{jos} \quad r \leq n, \\ (r-1)(r-2)\cdots(r-n+1) & \text{jos} \quad r > n. \end{cases}$$

Tulosäännön nojalla saadaan kaava (9.1).

Osa 2. Lauseen olettamusten ja osan 2 olettamusten nojalla $r \leq |J| < n$. Siis induktio-olettamuksen nojalla perheen $(A_j : j \in J)$ EES:ien lkm on vähintään $r!$. Jokainen näistä EES:stä voidaan laajentaa koko perheen $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ EES:ksi. Siis kaava (9.1) on voimassa. $\square$

Esimerkki 9.2.6 Olkoon $A_1 = \{1, 2, 3\}$ ja $A_2 = \{1, 2, 4\}$. Silloin lauseessa 9.2.2 $n = 2$ ja $r = 3$. Selvästi (HC) on voimassa (Harj.) Siis lauseen 9.2.2 mukaan EES:iä on vähintään $3(3-1)\cdots(3-2+1)$ eli 6 kpl. Luettelemalla voidaan todeta, että EES:iä on 7 kpl (Harj.). Huomaa, että EES:t ovat vektoreita. Siis esimerkiksi $(1, 2)$ ja $(2, 1)$ ovat perheen (A_1, A_2) kaksi eri EES:ää.

Harj. Todista, että esimerkissä 9.2.6 Hallin ehto (HC) on voimassa.

Harj. Luettele esimerkin 9.2.6 perheen (A_1, A_2) kaikki EES:t.

Lause 9.2.3 *Olkoon $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ sellainen perhe joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ osajoukkoja, että*

a) $|A_i| = r$ aina, kun $i = 1, 2, \ldots, n$,

b) jokainen $i = 1, 2, \ldots, n$ kuuluu täsmälleen r joukkoon perheessä $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$,

missä r on kiinteä positiivinen luku. Silloin perhe $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ toteuttaa Hallin ehdon (HC) (ja siis sillä on EES).

Tod. Olkoon $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, $J \neq \emptyset$, mielivaltainen indeksijoukko. Todistetaan, että $|A(J)| \geq |J|$. Lasketaan parien (j, x) lkm, missä $j \in J$, ja $x \in A_j$ kahdella tavalla.
i) Yhtäältä indeksi j voidaan valita $|J|$ tavalla ja jokaista indeksiä j kohti x voidaan valita r tavalla, joten pareja (j, x) on tulosäännön mukaan $r|J|$ kpl.
ii) Toisaalta $x \in A(J)$, joten x voidaan valita $|A(J)|$ tavalla. Olettamuksen (b) mukaan x kuuluu r joukkoon joukoista $A_1, A_2, \ldots, A_n$, joten indeksi j voidaan valita korkeintaan r tavalla. Näin ollen parien (j, x) lkm on $\leq r|A(J)|$.
Kun yhdistämme kohdat i) ja ii), saamme

$$r|J| \leq r|A(J)|.$$

Koska $r > 0$, niin (HC) on voimassa. $\square$

Lause 9.2.4 *Kun lauseen 9.2.3 olettamukset ovat voimassa, niin perheellä $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ on ainakin $r!$ kpl EES:iä.*

Tod. Lauseen 9.2.3 nojalla lauseen 9.2.2 olettamukset ovat voimassa. Lisäksi lauseen 9.2.3 olettamusten perusteella $r \leq n$. Näin ollen lauseen 9.2.2 mukaan EES:iä on ainakin $r!$ kpl. $\square$

Harj. a) Konstruoitava sellainen joukkoperhe, joka toteuttaa lauseen 9.2.4 ehdot, kun $n = 5$, $r = 3$. b) Mikä on EES:ien lkm?

9.3 Latinalaisten neliöiden lukumäärä

Tässä pykälässä tarkastellaan latinalaisten neliöiden lukumäärää. Eksplisiittistä kaavaa emme anna, eikä sellaista ilmeisesti tunnetakaan. Sen sijaan annamme arvion alarajaksi ja ylärajaksi.

Lukumäärän arviointi perustuu menetelmään, jossa latinalainen neliö konstruoidaan rivi riviltä. Tätä tarkoitusta varten määrittelemme latinalaisen suorakuolmion käsitteen. Olkoon $k \leq n$. Silloin $k \times n$-matriisia sanotaan *latinalaiseksi suorakulmioksi*, jos

1) sen elementit kuuluvat joukkoon $\{1, 2, \ldots, n\}$,

2) jokainen rivi sisältää alkiot $1, 2, \ldots, n$ täsmälleen kerran ja

3) jokainen sarake sisältää alkiot $1, 2, \ldots, n$ korkeintaa kerran.

Paria (k, n) sanotaan latinalaisen suorakulmion *kertaluvuksi.*

Esimerkki 9.3.1 Matriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

on kertaluvun $(2, 3)$ latinalainen suorakulmio.

Harj. Kuinka monta kertaluvun $(2, 3)$ latinalaista suorakulmiota on?

Harj. Kuinka monella tavalla latinalaiseen suorakulmioon

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

voidaan lisätä yksi rivi alle niin, että saadaan uusi latinalainen suorakulmio.

Lause 9.3.1 *Jokaisesta kertaluvun (k, n) latinalaisesta suorakulmiosta voidaan muodostaa vähintään $(n-k)!$ erilaista kertaluvun $(k+1, n)$ latinalaista suorakulmiota lisäämällä yksi rivi alkuperäisen latinalaisen suorakulmion alle.*

Tod. Uuden rivin elementit ovat $1, 2, \ldots, n$ sellaisessa järjestyksessä, että uuden elementin tulee olla erisuuri kuin vastaavan sarakkeen aikaisemmat elementit. Olkoon A_i niiden alkioiden joukko, jotka eivät esiinnyt alkuperäisen latinalaisen suorakulmion i. sarakkeella. Silloin $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on mahdollinen uusi rivi, jos ja vain jos se on perheen $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ EES. Siis mahdollisten lisättävien rivien lkm on sama kuin joukkojen $A_1, A_2, \ldots A_n$ EES:ien lkm. Sovelletaan EES:ien lkm:n laskemiseen lausetta 9.2.4. Todistetaan, että lauseen 9.2.4 olettamukset ovat voimassa, kun $r = n - k$.

a) Selvästi $|A_i| = n - k,\ i = 1, 2, \ldots, n$, sillä i. sarakkeella on käytetty k:ta lukua joukosta $\{1, 2, \ldots, n\}$ täsmälleen kerran ennen uuden rivin lisäämistä.

b) Olkoon $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mielivaltainen lisättävä luku. Silloin x esiintyy aikaisemmassa latinalaisessa suorakulmiossa k kertaa; täsmälleen kerran kullakin k rivillä ja korkeintaan kerran kullakin n sarakkeella. Näin ollen on olemassa täsmälleen $n-k$ saraketta, jolla x ei esiinny, toisin sanoen x kuuluu täsmälleen $n-k$ joukkoon joukoista $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Olemme nyt todistaneet, että lauseen 9.2.4 olettamukset ovat voimassa. Näin ollen joukkojen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ EES:iä on ainakin $(n-k)!$ kpl eli uusi rivi voidaan lisätä ainakin $(n-k)!$ tavalla. □

Lause 9.3.2 *Kertaluvun n latinalaisten neliöiden lkm on vähintään*

$$\prod_{k=1}^{n} k!.$$

Tod. Kootaan latinalainen neliö rivi riviltä. Ensimmäinen rivi voidaan muodostaa $n!$ tavalla. Lauseen 9.3.1 mukaan toinen rivi voidaan muodostaa ainakin $(n-1)!$ tavalla. Jatketaan samalla tavalla lauseen 9.3.1 soveltamista. Lopuksi tulosäännön nojalla saadaan lauseen 9.3.2 tulos. □

Esimerkki 9.3.2 Kertaluvun n latinlaisten neliöiden lkm on $1, 2, 12$, kun $n = 1, 2, 3$ eli sama kuin lauseen 9.3.2 alaraja (totea!). Voidaan todistaa, että kertaluvun 4 latinalaisia neliöitä on 576, joka on $> \prod_{k=1}^{4} k!$.

Harj. Luettele kertalukujen 1, 2 ja 3 latinalaiset neliöt.

Harj. Kuinka monella tavalla latinalaisen neliön ensimmäiset 2 riviä voidaan konstruoida?

Huom. Latinalaisten neliöiden lkm:n alarajalle on parempiakin arvioita kuin lauseen 9.3.2 arvio, esimerkiksi $(n!)^{2n}/n^{n^2}$. (Todistus sivuutetaan.)

Huom. Latinalaisessa neliössä on n^2 paikkaa ja paikat täytetään luvuilla $1, 2, \ldots, n$. Näin saadaan karkea arvio

$$L(n) \leq n^{n^2},$$

missä $L(n)$ tarkoittaa... Kun otetaan huomioon, että jokainen rivi on joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ permutaatio, saadaan parempi arvio

$$L(n) \leq (n!)^n.$$

Harj. Todista, että

$$L(n) \leq n!(D_n)^{n-1}.$$

Lausu tämän avulla karkea parannus yo. ylärajoille.