Differenssiyhtälöt 2020, viikko 14, 1.4.2020,
harjoitus 4

Huom: Vastauksia ei tarvitse todistaa induktiolla (ellei toisin pyydetä).

1. Olkoon $S = \mathbb{Z}_0^+$ ja $h = 1$. Laskettava $\Delta^{-1}(k\,2^{-k})$ osittaisantidifferenssikaavalla. (Monisteen luku 1.4)

2. Tutkittava funktioiden
   a) 3^k ja $k3^k$
   b) 3^k ja 3^{k+1}
   lineaarista riippumattomuutta joukossa $\mathbb{Z}_0^+$ määritelmän perusteella. (Luku 2.4)

3. a) Määritettävä funktioiden 3^k ja $k3^k$ Casoratin determinantti.
   b) Tutkittava funktioiden 3^k ja $k3^k$ lineaarista riippumattomuutta joukossa $\mathbb{Z}_0^+$ lauseen 2.4.1 tai sen seurauksen avulla (kun oletetaan tunnetuksi, että funktiot ovat erään 2. kertaluvun homogeenisen differenssiyhtälön ratkaisuja). (Luku 2.4)

4. Ratkaise differenssiyhtälö
$$y_{k+1} + (k+1)y_k = 0.$$
   Ilmoita ratkaisuavaruuden kanta ja dimensio. (Luku 2.6)

5. a) Ratkaise differenssiyhtälö
$$y_{k+1} - 4y_k = 0.$$
   Ilmoita ratkaisuavaruuden kanta ja dimensio.
   b) Ratkaise differenssiyhtälö
$$y_{k+1} - 4y_k = 2^k$$
   menetelmällä I. Etsi yksityisratkaisu sekä vakion varioinnilla että yritefunktiolla. (Luku 2.6)

6. Ratkaise edellisen tehtävän b-kohdan differenssiyhtälö (antidifferenssi)menetelmällä II. (Luku 2.6)

7. Differentiaaliyhtälön $Df(x) = f(x)$ ratkaisu on $f(x) = Ce^x$. Ratkaise sen diskreetti vastine $\Delta f(k) = f(k)$, kun $S = \mathbb{Z}_0^+$ ja $h = 1$. (Luku 2.6)

8. Todista, että lauseen 2.5.1 todistuksen funktio L on lineaarikuvaus. (Luku 2.5)

9. Esitä lauseen 2.5.2 todistuksen vaiheen 2 yksityiskohdat. (Luku 2.5)