

Differenssiyhtälöt, viikko 13 (25.3.2020), mttma7(at)lists.tuni.fi,
harjoitus 3

1. a) Esitä kertomapolynomi $3x^{(2)} + 5x^{(1)} - 4$ potenssipolynomina.
(Ts. etsi ko. kertomapolynomin koordinaatit kannan x^2, x^1, x^0 suhteen.)
b) Esitä potenssipolynomi $3x^2 + 5x - 4$ kertomapolynomina.
(Ts. etsi ko. potenssipolynomin koordinaatit kannan $x^{(2)}, x^{(1)}, x^{(0)}$ suhteen.)
2. Laskettava tehtävän 1b polynomin antidifferenssi.
3. Määritä $\Delta^{-1} \sin(ax)$, kun $a \neq 0$.
(Vihje: Ratkaisu riippuu jollakin tavalla funktiosta $\cos(ax + b)$ sopivalla valinnalla b .
Mikä olisi tällainen b ?)
4. Olkoon $h = 1$ ja $k \in \mathbb{Z}_+$. Määritä
 - a) kertoma $k^{(-2)}$,
 - b) antidifferenssi $\Delta^{-1} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$,
 - c) summa

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

5. Todista summakaava

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

differenssilaskennan keinoin.

6. Tutkittava, onko voimassa $\Delta(Cf) = C\Delta f$,
kun C on a) vakiofunktio, b) h -jaksollinen funktio, c) funktio.
7. a) Konstruoi derivaatan tulosäännön vastine taaksepäiselle differenssille,
ts. kehitä kaava funktiolle $\nabla(uv)$. b) Todistus.
8. a) Olkoon $V = \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ reaalimuuttujan reaaliarvoisten funktioiden vektoriavaruus.
Määritä $\ker \Delta$.
b) Olkoon $\Delta F = f$. Kirjoita funktion f kaikkien antidifferenssien joukko joukon $\ker \Delta$ avulla.
9. Todista binomikaavan vastine

$$(x+a)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{(k)} a^{(n-k)}$$

kertomafunktiolle.

Vihje: Sovella Newtonin esitystä (lause 1.3.3).