

**Differenssiyhtälöt 2020, viikko 12,
harjoitus 2**

1. Laskettava a) Δx^2 , b) $\Delta^2 x^2$, c) $\Delta^n x^2$, kun $n \geq 3$.
2. a) Tutkittava, onko voimassa $E\nabla = \nabla E$.
b) Tutkittava, onko voimassa $\Delta\nabla = \nabla\Delta$.
(Lineaarinen operaattori ∇ on esitelty huomautuksessa 1.2.3.)
3. Todista lauseen 1.2.3 kohta b.
4. Todista osamäärän derivointikaava käyttämällä lausetta 1.2.3.b.
5. Tutkittava, onko voimassa:
 - a) $x^{(n)}x^{(k)} = x^{(n+k)} \quad \forall n, k = 1, 2, \dots$
 - b) $x^{(n)}x^{(-n)} = 1 \quad \forall n = 1, 2, \dots$
 - c) $Dx^{(n)} = nx^{(n-1)} \quad \forall n = 1, 2, \dots$
6. Todista lause 1.3.4.
7. Lineaarisen operaattorin $A \in \mathcal{L}_S$ sanotaan toteuttavan *Leibnizin säännön*, jos

$$A(fg) = f Ag + g Af \quad \forall f, g \in \mathcal{F}_S,$$

ja sen sanotaan olevan *multiplikatiivinen*, jos

$$A(fg) = (Af)(Ag) \quad \forall f, g \in \mathcal{F}_S.$$

Tutkittava, mitkä lineaarisista operaattoreista O , I , D , E ja Δ toteuttavat Leibnizin säännön ja mitkä ovat multiplikatiivisia. Mitä voidaan sanoa niiden additiivisuudesta? Lyhyt perustelu riittää.