

**Differenssiyhtälöt 2020, viikko 11,  
harjoitus 1**

1. Olkoon funktio  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on kahdesti derivoituva funktio.
  - a) Määritä  $D(f^2)$ .
  - b) Määritä  $D^2(f^2)$ .
  - c) Määritä  $(D(f^2))^2$ .
2. Olkoon funktio  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on kahdesti derivoituva funktio.
  - a) Määritä  $D(D + I)f$ .
  - b) Määritä  $(D + I)^2 f$ .
3. Tutkittava, onko
  - a)  $A : \mathcal{F}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{R}}, Af(x) = f(x + 1)$ ,
  - b)  $B : \mathcal{F}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{R}}, Bf(x) = f(x) + 1$ ,lineaarinen operaattori.
4. Olkoon  $V = \mathcal{F}'_{\mathbb{R}}$  derivoituvien reaalimuttujan reaaliarvoisten funktioiden vektoriavaruus. Olkoon  $A : V \rightarrow V, Af(x) = f(x + 1)$ ,  $B : V \rightarrow V, Bf(x) = f(e^x)$ . Tutkittava, onko
  - a)  $AB = BA$ , b)  $AD = DA$ , c)  $BD = DB$ , d)  $BD = D$ ,missä  $D$  on derivaattaoperaattori.
5. Todista funktioiden yhteenlaskun liitännäisyys, ts. todista, että

$$(f + g) + h = f + (g + h) \quad \forall f, g, h \in \mathcal{F}_S.$$

6. Todista, että reaalilukujen joukossa derivoituvat funktiot muodostavat vektoriavaruuden (funktioiden yhteenlaskun ja skalaarilla kertomisen suhteen). Vihje: Sovella lineaarialgebra 1B:n aliavaruuskriteeriä. Analyyttisiä yksityiskohtia ei tarvitse käydä läpi.
7. Olkoon  $V = \mathcal{F}'_{\mathbb{R}}$  derivoituvien reaalimuttujan reaaliarvoisten funktioiden vektoriavaruus. Määritä  $\ker D$ .