Harjoitus $\boxed{3.}$

Tehtävä ① Kertomafunktion määritelmän avulla voidaan laskea, että $x^{(2)}=x(x-h)=x^2-hx$, $x^{(1)}=x$ ja $x^{(0)}=1$.

a) Esitettävä kertomapolynomi $3x^{(2)}+5x^{(1)}-4$ potenssipolynomina.

Nyt sijoittamalla yllä lasketut kertomafunktioiden arvot $x^{(2)}$, $x^{(1)}$ ja $x^{(0)}$ saadaan

$$\begin{aligned}3x^{(2)}+5x^{(1)}-4x^{(0)} &= 3(x^2-hx)+5x-4\\ &= 3x^2-3hx+5x-4\\ &= \underline{3x^2+(5-3h)x-4}\end{aligned}$$

b) Esitettävä potenssipolynomi $3x^2+5x-4$ kertomapolynomina.

Etsitään siis sellaiset luvut a_0, a_1 ja a_2, että

$$3x^2+5x-4 = a_2x^{(2)}+a_1x^{(1)}+a_0x^{(0)} = a_2x(x-h)+a_1x+a_0.$$

Potenssipolynomin kertoimien yksikäsitteisyyden nojalla on oltava $a_2=3$ ja $a_0=-4$. Ratkaistaan vielä a_1.

Tapa I: (Vrt. Lauseen 1.3.2 Tod.). Sijoitetaan $x=h$. Tällöin

$$\begin{aligned}3h^2+5h\cancel{-4} &= a_2h\overbrace{(h-h)}^{=0}+a_1h+a_0\\ &= a_1h\cancel{-4}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 3h^2+5h=a_1h \Leftrightarrow a_1=3h+5$$

Saadaan lopulta siis

$$3x^2+5x-4=\underline{3x^{(2)}+(3h+5)x^{(1)}-4x^{(0)}}.$$

Tapa II: Ratkaistaan kertoimet yhtälöstä

$$3x^2+5x-4=3x^{(2)}+a_1x^{(1)}-4=3x^2-3hx+a_1x-4$$

$$=3x^2+(a_1-3h)x-4,$$

eli $5=a_1-3h \Leftrightarrow a_1=3h+5$, joten saadaan

$$3x^2+5x-4=\underline{3x^{(2)}+(3h+5)x^{(1)}-4x^{(0)}}.$$

Tehtävä 2. Laskettava polynomin $3x^2+5x-4$ antidifferenssi. Etsitään siis $F \in \tilde{\mathcal{F}}_s$ s.e. $\Delta F = 3x^2+5x-4$. Nyt

$$
\begin{aligned}
F = \Delta^{-1}(3x^2+5x-4) &\overset{(1)}{=} \Delta^{-1}\left(3x^{(2)}+(3h+5)x^{(1)}-4x^{(0)}\right) \\
&\overset{(2)}{=} \Delta^{-1}(3x^{(2)}) + \Delta^{-1}((3h+5)x^{(1)}) + \Delta^{-1}(-4x^{(0)}) \\
&\overset{(3)}{=} 3\Delta^{-1}x^{(2)} + (3h+5)\Delta^{-1}x^{(1)} - 4\Delta^{-1}x^{(0)} \\
&\overset{(4)}{=} \frac{3x^{(3)}}{3h} + \frac{(3h+5)x^{(2)}}{2h} - \frac{4x^{(1)}}{h} + C \\
&\overset{(5)}{=} \underline{\frac{1}{h}x^{(3)} + \frac{(3h+5)}{2h}x^{(2)} - \frac{4}{h}x^{(1)} + C}
\end{aligned}
$$

(1) Tehtävä 1. b)-kohta.

(2) Lause 1.4.3. a)-kohta.

(3) Lause 1.4.3. b)-kohta, vakiofunktiot h-jaksollisia.

(4) Lause 1.4.3. d)-kohta, C on h-jaksollinen funktio.

(5) Reaalialgebraa.

Tehtävä 3. Määritettävä $\Delta^{-1}\sin(ax)$, kun $a \neq 0$.

Palautetaan ensin mieleen, että

$$(x)\quad \cos(-x) = \cos(x)$$

$$(xx)\quad \sin(-x) = -\sin(x)$$

$$(xxx)\quad \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

Sitten voidaan laskea, että

$$\cos\left(ax + \frac{ah}{2}\right) - \cos\left(ax - \frac{ah}{2}\right)$$

$$\overset{(xxx)}{=} \cos(ax)\cos\left(\frac{ah}{2}\right) - \sin(ax)\sin\left(\frac{ah}{2}\right) - \cos(ax)\cos\left(-\frac{ah}{2}\right) + \sin(ax)\sin\left(-\frac{ah}{2}\right)$$

$$\overset{(x),(xx)}{=} \cancel{\cos(ax)\cos\left(\frac{ah}{2}\right)} - \sin(ax)\sin\left(\frac{ah}{2}\right) - \cancel{\cos(ax)\cos\left(\frac{ah}{2}\right)} - \sin(ax)\sin\left(\frac{ah}{2}\right)$$

$$= -2\sin(ax)\sin\left(\frac{ah}{2}\right) \overset{(xx)}{=} 2\sin(ax)\sin\left(-\frac{ah}{2}\right),$$

Siis (*) $\sin(ax) = \dfrac{\cos\left(ax + \frac{ah}{2}\right) - \cos\left(ax - \frac{ah}{2}\right)}{2\sin\left(-\frac{ah}{2}\right)}$, kun $ah \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Tarkastellaan nyt funktiota $F(x) = \dfrac{\cos\left(ax - \frac{ah}{2}\right)}{2\sin\left(-\frac{ah}{2}\right)} + C(x)$, missä $C(x)$ on h-jaksollinen funktio. Tällöin

$$\Delta F(x) = \frac{1}{2\sin\left(-\frac{ah}{2}\right)} \Delta\cos\left(ax - \frac{ah}{2}\right) + \Delta C(x)$$

$$= \frac{1}{2\sin\left(-\frac{ah}{2}\right)} \left(\cos\left(ax + ah - \frac{ah}{2}\right) - \cos\left(ax - \frac{ah}{2}\right)\right) + 0$$

$$= \frac{\cos(ax + \frac{ah}{2}) - \cos(ax - \frac{ah}{2})}{2\sin(-\frac{ah}{2})}$$

$$\overset{(*)}{=} \sin(ax).$$

Täten siis $\Delta F(x) = \sin(ax)$ eli

$$\Delta^{-1}\sin(ax) = F(x) = \frac{\cos(ax - \frac{ah}{2})}{2\sin(-\frac{ah}{2})} + C(x)$$

Tehtävä (4.) Olk. $h=1$ ja $k \in \mathbb{Z}_+$. Määritettävä

a) kertoma $k^{(-2)}$. Nyt $k^{(-2)} \underset{\text{määr.}}{=} \frac{1}{(k+2)^{(2)}} = \frac{1}{(k+2)(k+2-1)} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.

b) antidifferenssi $\Delta^{-1} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.

Nyt $\Delta^{-1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \overset{a)}{=} \Delta^{-1} k^{(-2)} \underset{\text{L.1.4.3.d)}}{=} \frac{k^{(-1)}}{(-2+1)} + C = -k^{(-1)} + C = -\frac{1}{k+1} + C$

c) summa $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.

Nyt $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \overset{a)}{=} \sum_{k=0}^{n} k^{(-2)} \overset{\text{Seuraus 1.5.1.}}{=} \Big/_{0}^{n+1} \Delta^{-1} k^{(-2)} = \Big/_{0}^{n+1} \left(-\frac{1}{k+1} + C\right)$

$= -\frac{1}{n+2} + \cancel{C} + 1 - \cancel{C} = -\frac{1}{n+2} + \frac{n+2}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$

Tehtävä 5.

Väite: $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Tod. Olk. $k \in \mathbb{Z}_+$. k^2 voidaan esittää kertoma-polynomina, eli
$$k^2 = a_2 k^{(2)} + a_1 k^{(1)} + a_0 k^{(0)}$$
$$= a_2 k(k-h) + a_1 k + a_0$$
$$= a_2 k^2 - a_2 hk + a_1 k + a_0$$
$$= a_2 k^2 + (a_1 - a_2 h)k + a_0,$$
mistä saadaan ratkaistua $a_2 = 1$, $a_0 = 0$ ja $a_1 = a_2 h = h$ eli $k^2 = k^{(2)} + hk^{(1)}$. Olk. nyt $h = 1$. Tällöin saadaan
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} (k^{(2)} + k^{(1)}) = \Big/_{0}^{n+1} \Delta^{-1}(k^{(2)} + k^{(1)}) = \Big/_{0}^{n+1} (\Delta^{-1} k^{(2)} + \Delta^{-1} k^{(1)})$$
$$= \Big/_{0}^{n+1} \left(\frac{k^{(3)}}{3} + \frac{k^{(2)}}{2}\right) = \frac{(n+1)^{(3)}}{3} + \frac{(n+1)^{(2)}}{2}$$
$$= \frac{(n+1)(n+1-1)(n+1-2)}{3} + \frac{(n+1)(n+1-1)}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{2n(n+1)(n-1) + 3n(n+1)}{6} = \frac{2n^3 \cancel{-2n^2} \cancel{+2n^2} - 2n + 3n^2 + 3n}{6}$$
$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \underline{\underline{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}},$$
joten väite on todistettu.

Tehtävä 6. Tutkitaan, pāteekō $\Delta(Cf)=C\Delta f$, kun C on

a) vakiofunktio? Olk. nyt $C, f \in \mathbb{R}_S^{\sim}$ ja $x \in S$.

Tällöin vakiofunktiona $C(x)=a$, $a \in \mathbb{R}$ jokaisella $x \in S$, eli $\underline{\Delta(Cf)(x)} = \Delta(C(x)f(x)) = \Delta(af(x))$

$= a\Delta f(x) = C(x)(\Delta f(x)) = \underline{(C\Delta f)(x)}$, sillä $\Delta \in \mathcal{L}_S$.

Siis pätee $\Delta(Cf)=C\Delta f$, kun C on vakiofunktio.

b) h-jaksollinen funktio? Olk. taas $C, f \in \mathbb{R}_S^{\sim}$ ja $x \in S$.

Tällöin h-jaksollisena funktiona $C(x+h)=C(x)$ jokaisella $x \in S$, eli $\underline{\Delta(Cf)(x)} = \Delta(C(x)f(x))$

L.1.23. $= C(x)(\Delta f(x)) + (\Delta C(x))(Ef(x))$

$= (C\Delta f)(x) + (C(x+h)-C(x))(f(x+h))$

$= (C\Delta f)(x) + \underbrace{(C(x)-C(x))}_{=0} f(x+h)$

$= \underline{(C\Delta f)(x)}$.

Siis pätee $\Delta(Cf)=C\Delta f$, kun C on h-jaksollinen.

c) funktio? Tarkastellaan funktioita $C(x)=f(x)=x$.

Nyt $\Delta(Cf)(x) = \Delta(C(x)f(x)) = \Delta x^2 = 2hx+h^2$

$\neq hx = x(x+h-x) = C(x)(f(x+h)-f(x)) = C(x)(\Delta f(x)) = (C\Delta f)(x)$

Siis ei päde $\Delta(Cf)=C\Delta f$, kun C on funktio.

Tehtävä 7

a) Kehitettävä kaava funktiolle $\nabla(uv)$.

Nyt, kun $f \in \hat{\mathcal{F}}_S$, niin $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$.

b) Ja todistettava, että kaava pätee.

Pohditaan ensin Lauseen 1.2.3. kohdan a) todistusta, jos se suoritettaisiin monisteen järjestyksessä alhaalta ylös. Tällöin siirryttäessä toiselta riviltä kolmannelle yhtälön oikealle puolelle lisättäisiin termi $u(x)v(x+h) - u(x)v(x+h)$. Käytetään tätä taktiikkaa, kun kehitetään kaava funktiolle $\nabla(uv)$.

Kehitetään kaava mielivaltaisille $u, v \in \hat{\mathcal{F}}_S$ ja $x \in S$, jolloin kaava tulee todistetuksi saman tien.

Määritellään ensin operaattoria E vastaava operaattori $T: \hat{\mathcal{F}}_S \to \hat{\mathcal{F}}_S$, $Tf(x) = f(x-h)$. $T \in \mathcal{L}_S$, sillä kun $a \in \mathbb{R}$ ja $f, g \in \hat{\mathcal{F}}_S$ sekä $x \in S$, niin

$$T(af+g)(x) = (af+g)(x-h) = (af)(x-h) + g(x-h)$$
$$= af(x-h) + g(x-h) = a(Tf)(x) + (Tg)(x) = (aTf + Tg)(x).$$

Nyt voidaan lähteä kehittämään kaava yllä mainittujen pohdintojen ja määritelmän avulla. Olk. nyt siis $u, v \in \hat{\mathcal{F}}_S$ ja $x \in S$.

$$
\begin{aligned}
\underline{\nabla(uv)(x)} &= (uv)(x) - (uv)(x-h) \\
&= u(x)v(x) - u(x-h)v(x-h) \\
&= u(x)v(x) - u(x-h)v(x-h) + u(x)v(x-h) - u(x)v(x- \\
&= u(x)(v(x) - v(x-h)) + v(x-h)(u(x) - u(x-h)) \\
&= u(x)(\nabla v(x)) + (Tv(x))(\nabla u(x)) \\
&= (u\nabla v)(x) + ((Tv)(\nabla u))(x) = \underline{(u\nabla v + (Tv)(\nabla u))(x)}
\end{aligned}
$$

Täten eräs muoto pyydetylle kaavalle olisi $\nabla(uv) = u\nabla v + (Tv)(\nabla u)$, joka on myös edellä todistettu.

Huom!

$$
\begin{aligned}
\nabla(uv) &= u\nabla v + (Tv)(\nabla u) \\
&= u\nabla v + ((I - \nabla)v)(\nabla u) \\
&= u\nabla v + v\nabla u - \nabla u \nabla v
\end{aligned}
$$

Tehtävä 8.

a) Olk. $V = \tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}}$ reaalimuuttujan reaaliarvoisten funktioiden vektoriavaruus.

Määritettävä $\ker \Delta$.

Nyt, kun $f \in \tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}}$ ja $x \in \mathbb{R}$ saadaan

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = 0 \iff f(x+h) = f(x)$$
$$\iff f \text{ on } h\text{-jaksollinen.}$$

Täten siis $\ker \Delta = \{ f \in V \mid \Delta f \equiv 0 \}$
$= \{ f \in V \mid f \text{ on } h\text{-jaksollinen funktio} \}$.

$\ker \Delta$ on siis h-jaksollisten funktioiden joukko.

b) Olk. $\Delta F = f$. Kirjoitettava funktion f kaikkien antidifferenssien joukko joukon $\ker \Delta$ avulla.

Tunnetusti $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}}$ muodostaa funktioiden yhteenlaskun ja kertolaskun suhteen renkaan. Täten $(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}}, +)$ on (Abelin) ryhmä. Lauseen 1.4.2. nojalla nyt G on funktion f antidifferenssi, kun $G = F + C$, missä C on h-jaksollinen funktio. Edelleen $(\ker \Delta, +)$ on ryhmän $(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}}, +)$ aliryhmä, sillä kun $C_1, C_2 \in \ker \Delta$ ja $x \in S$, niin $(C_1 - C_2)(x) = C_1(x) - C_2(x) = C_1(x+h) - C_2(x+h) = (C_1 - C_2)(x+h)$ eli $C_1 - C_2 \in \ker \Delta$. Nyt funktion f kaikki antidifferenssit voidaan kirjoittaa ryhmän $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}}$ sivuluokkana $F + \ker\Delta = \{F + C \mid C \in \ker\Delta\}$.

Tehtävä 9.

Väite: $(x+a)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(k)} a^{(n-k)}$.

Todistus: Tiedetään, että kertomapolynomi voidaan esittää potenssipolynomina, jolloin lauseen 1.3.3. nojalla saadaan kertomapolynomille

$$\underline{(x+a)^{(n)}} = (0+a)^{(n)} + \frac{n\cancel{h}(0+a)^{(n-1)}}{\cancel{h}} x^{(1)} + \frac{n(n-1)\cancel{h^2}(0+a)^{(n-2)}}{2!\cancel{h^2}} x^{(2)} +$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))\cancel{h^n}(0+a)^{(n-n)}}{n!\cancel{h^n}} x^{(n)}$$

$$= a^{(n)} + na^{(n-1)}x^{(1)} + \frac{n(n-1)}{2!} a^{(n-2)} x^{(2)} + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{n!} x^{(n)}$$

$$= \frac{n!}{0!(n-0)!} x^{(0)} a^{(n-0)} + \frac{n!}{1!(n-1)!} x^{(1)} a^{(n-1)} + \frac{n!}{2!(n-2)!} x^{(2)} a^{(n-2)} + \ldots$$

$$+ \frac{n!}{n!(n-n)!} x^{(n)} a^{(n-n)}$$

$$= \binom{n}{0} x^{(0)} a^{(n-0)} + \binom{n}{1} x^{(1)} a^{(n-1)} + \binom{n}{2} x^{(2)} a^{(n-2)} + \ldots + \binom{n}{n} x^{(n)} a^{(n-n)}$$

$$= \underline{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(k)} a^{(n-k)}}.$$

Päättelyssä käytettiin siis kertoman ja summan määr. sekä lausetta 1.3.1.