$\boxed{H2.}$ Tehtävä (1) Funktion f ensimmäinen differenssi askelpituudella h Δf on sellainen ftio, että

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x).$$

a) Lasketaan nyt $\Delta f(x)$, kun $f(x) = x^2$

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = \cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}$$
$$= 2hx + h^2.$$

b) Lasketaan sitten $\Delta^2 f(x)$, kun $f(x) = x^2$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta(2hx + h^2) = 2h(x+h) + h^2 - 2hx - h^2$$
$$= \cancel{2hx} + 2h^2 \cancel{+h^2} \cancel{-2hx} \cancel{-h^2} = 2h^2$$

c) Lasketaan vielä $\Delta^n f(x)$, kun $f(x) = x^2$. Osoitetaan ensin induktiolla luvun n suhteen, että kun $a \in \mathbb{R}$, niin (*) $\Delta^n a = 0$.

<u>Perusaskel:</u> Monisteen esimerkin 1.2.1 c) nojalla selvä.

<u>Induktio-oletus:</u> $\Delta^n a = 0$ jollain n.

<u>Induktioväitteen todistus:</u> Nyt $\Delta^{n+1} a = \Delta(\Delta^n a) \overset{I.O.}{=} \Delta 0 = 0.$

Väite pätee siis induktioperiaatteen nojalla.

Nyt siis, kun $n \geq 3$ saadaan

$$\Delta^n f(x) = \Delta^n x^2 = \Delta^{n-1}(\Delta x^2) \overset{a)}{=} \Delta^{n-2}(\Delta(2hx + h^2))$$
$$\overset{b)}{=} \Delta^{n-2} 2h^2 \overset{(*)}{=} 0, \text{ sillä } 2h^2 \in \mathbb{R}.$$

Tehtävä 2.

Nyt $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$, $Ef(x) = f(x+h)$ ja $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$.

a) Tutkitaan, onko voimassa $E\nabla = \nabla E$?

Olk. nyt $f \in \mathcal{F}_S$ ja $x \in S$. Tällöin

$$\underline{E(\nabla f(x))} = E(f(x) - f(x-h)) = Ef(x) - Ef(x-h)$$
$$= f(x+h) - f((x+h)-h) = f(x+h) - f(x)$$
$$(= \Delta f(x))$$
$$= f(x+h) - f(x) = f(x+h) - f((x+h)-h)$$
$$= \nabla f(x+h) = \underline{\nabla(Ef(x))}.$$

Täten, koska f oli mielivaltainen, niin $E\nabla = \nabla E$.

b) Tutkitaan, onko voimassa $\Delta\nabla = \nabla\Delta$?

Olk. jälleen $f \in \mathcal{F}_S$ ja $x \in S$. Tällöin

$$\underline{\Delta(\nabla f(x))} = \Delta(f(x) - f(x-h)) = \Delta f(x) - \Delta f(x-h)$$
$$= f(x+h) - f(x) - f((x-h)+h) + f(x-h)$$
$$= f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)$$
$$= f(x+h) - f((x+h)-h) - f(x) + f(x-h)$$
$$= \nabla f(x+h) - \nabla f(x) = \nabla(f(x+h) - f(x)) = \underline{\nabla(\Delta f(x))}.$$

Jälleen, koska f oli mielivaltainen, niin $\Delta\nabla = \nabla\Delta$.

Tehtävä 3. Olk. $u, v \in \tilde{\mathcal{F}}_S$.

Väite: $\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{vEv}$, $v(x) \neq 0 \; \forall x \in S$.

Todistus: Olk. nyt $x \in S$. Tällöin

$$\left(\frac{v\Delta u - u\Delta v}{vEv}\right)(x) \overset{(1)}{=} \frac{(v\Delta u)(x) - (u\Delta v)(x)}{(vEv)(x)}$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{v(x)(\Delta u(x)) - u(x)(\Delta v(x))}{v(x)(Ev(x))}$$

$$\overset{(3)}{=} \frac{v(x)(u(x+h) - u(x)) - u(x)(v(x+h) - v(x))}{v(x)v(x+h)}$$

$$\overset{(4)}{=} \frac{v(x)u(x+h) - \cancel{v(x)u(x)} - u(x)v(x+h) + \cancel{v(x)u(x)}}{v(x)v(x+h)}$$

$$\overset{(5)}{=} \frac{\cancel{v(x)}u(x+h)}{\cancel{v(x)}v(x+h)} - \frac{u(x)\cancel{v(x+h)}}{v(x)\cancel{v(x+h)}}$$

$$\overset{(6)}{=} \frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)} \overset{(7)}{=} \left(\frac{u}{v}\right)(x+h) - \left(\frac{u}{v}\right)(x) \overset{(8)}{=} \Delta\left(\frac{u}{v}\right)(x).$$

Täten, koska x oli mielivaltainen, niin funktioilla $\Delta\left(\frac{u}{v}\right)$ ja $\frac{v\Delta u - u\Delta v}{vEv}$ on samat arvot eli

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{vEv}.$$

(1), (2), (7) : $u, v \in \tilde{\mathcal{F}}_S$

(3), (8) : Δ:n määritelmä

(4), (5), (6) : Reaalialgebra

Tehtävä 4. Olk. $u, v \in \mathcal{F}_S^{\prime}$ s.e. $v(x) \neq 0$ $\forall x \in S$.

Väite: $\left(\frac{u}{v}\right)^{\prime} = \frac{u^{\prime}v - uv^{\prime}}{v^2}$.

Todistus: Olk. $x \in S$. Tällöin

$$\left(\frac{u}{v}\right)^{\prime}(x) \overset{(1)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\Delta\left(\frac{u}{v}\right)(x)}{h}$$

$$\overset{(2)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{v(x)(\Delta u(x)) - u(x)(\Delta v(x))}{h v(x)(Ev(x))}$$

$$\overset{(3)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{1}{v(x)(Ev(x))}\left[v(x)\frac{\Delta u(x)}{h} - u(x)\frac{\Delta v(x)}{h}\right]$$

$$\overset{(4)}{=} \frac{1}{v(x)} \lim_{h \to 0} \frac{1}{v(x+h)}\left[v(x)\lim_{h \to 0}\frac{\Delta u(x)}{h} - u(x)\lim_{h \to 0}\frac{\Delta v(x)}{h}\right]$$

$$\overset{(5)}{=} \frac{1}{v(x)}\frac{1}{v(x)}\left[v(x)u^{\prime}(x) - u(x)v^{\prime}(x)\right]$$

$$\overset{(6)}{=} \frac{v(x)u^{\prime}(x) - u(x)v^{\prime}(x)}{(v(x))^2} = \left(\frac{vu^{\prime} - uv^{\prime}}{v^2}\right)(x).$$

Koska x oli m.v., niin $\left(\frac{u}{v}\right)^{\prime} = \frac{u^{\prime}v - uv^{\prime}}{v^2}$.

(1) Derivaaton määritelmä.

(2) Lause 1.2.3 b)

(3) Kirjoitetaan edellinen rivi eri muodossa.

(4) lim ominaisuus: $v(x)$ ja $u(x)$ eivät riipu h:sta, joten $\lim_{h \to 0}$ voidaan siirtää niiden yli

(5) $v \in \mathcal{F}_S^{\prime}$, joten v on jatkuva eli $\lim_{h \to 0} \frac{1}{v(x+h)} = \frac{1}{v(x)}$. Deriv. määr.

(6) Reaalialgebraa ja funktioiden $u, v, u^{\prime}, v^{\prime}$ ominaisuus.

Tehtävä 5. Kertomafunktio: $x^{(0)} = 1$

$(n \geq 1)$ $x^{(n)} = x(x-h)(x-2h)\cdots(x-(n-1)h)$

a) Tutkitaan, onko voimassa $x^{(n)}x^{(k)} = x^{(n+k)}$ $\forall n,k = 1,2,\ldots$?
Tutkitaan tapausta $n=k=1$. Tällöin $x^{(1)} = x$ ja $x^{(1+1)} = x^{(2)} = x(x-h) = x^2 - hx$. Täten $x^{(n)}x^{(k)} \neq x^{(n+k)}$, kun $n=k=1$, sillä $x^{(1)}x^{(1)} = x \cdot x = x^2 \neq x^2 - hx = x^{(2)} = x^{(1+1)}$. Ei siis ole voimassa $x^{(n)}x^{(k)} = x^{(n+k)}$ $\forall n,k = 1,2,\ldots$

b) Tutkitaan, onko voimassa $x^{(n)}x^{(-n)} = 1$ $\forall n = 1,2,\ldots$?
Nyt $x^{(-n)} = \frac{1}{(x+nh)^{(n)}}$. Tutkitaan tapausta $n=1$. Tällöin $x^{(1)} = x$ ja $x^{(-1)} = \frac{1}{(x+h)^{(1)}} = \frac{1}{x+h}$. Siis $x^{(1)}x^{(-1)} = \frac{x}{x+h} \neq 1$, joten ei ole voimassa $x^{(n)}x^{(-n)} = 1$ $\forall n = 1,2,\ldots$

c) Tutkitaan, onko voimassa $Dx^{(n)} = nx^{(n-1)}$ $\forall n = 1,2,\ldots$?
Nyt tapauksessa $n=1$ väite pätee, sillä $Dx^{(1)} = Dx = 1 = 1 \cdot x^{(0)} = 1 \cdot x^{(1-1)}$. Kuitenkin tapauksessa $n=2$ saadaan $Dx^{(2)} = D(x(x-h)) = D(x^2 - hx) = 2x - h \neq 2x = 2x^{(1)} = 2x^{(2-1)}$.
Täten ei ole voimassa $Dx^{(n)} = nx^{(n-1)}$ $\forall n = 1,2,\ldots$

Tehtävä 6. Olk. $n \in \mathbb{Z}^+$.

<u>Väite:</u> $\Delta x^{(-n)} = -nh\, x^{(-n-1)}$

<u>Todistus:</u> $\Delta x^{(-n)} \overset{(1)}{=} \Delta\left(\frac{1}{(x+nh)^{(n)}}\right)$

$$\overset{(2)}{=} \frac{(x+nh)^{(n)}\Delta(1) - 1\cdot\Delta(x+nh)^{(n)}}{(x+nh)^{(n)}E(x+nh)^{(n)}}$$

$$\overset{(3)}{=} \frac{-\Delta(x+nh)^{(n)}}{(x+nh)^{(n)}E(x+nh)^{(n)}}$$

$$\overset{(4)}{=} -nh\frac{(x+nh)^{(n-1)}}{(x+nh)^{(n)}(x+(n+1)h)^{(n)}}$$

$$\overset{(5)}{=} -nh\frac{\cancel{(x+nh)(x+(n-1)h)\cdots(x+2h)}}{\cancel{(x+nh)(x+(n-1)h)\cdots(x+2h)}(x+h)(x+(n+1)h)^{(n)}}$$

$$\overset{(6)}{=} -nh\frac{1}{(x+h)(x+(n+1)h)^{(n)}} = -nh\frac{1}{(x+(n+1)h)^{(n)}(x+h)}$$

$$\overset{(7)}{=} -nh\frac{1}{(x+(n+1)h)(x+nh)\cdots(x+2h)(x+h)}$$

$$\overset{(8)}{=} -nh\frac{1}{(x+(n+1)h)^{(n+1)}}$$

$$\overset{(9)}{=} -nh\,x^{(-n-1)}.$$

(1) Määritelmä 1.3.3.

(2) Lause 1.2.3 b), missä nyt $u(x)=1$ ja $v(x)=(x+nh)^{(n)}$.

(3) $\Delta(1)=0$, sillä $1\in\mathbb{R}$.

(4) Huomautus 1.3.2.

(5) Kertomafunktion määr.

(6) Reaalialgebraa

(7) Kertomafunktion määr. $\left((x+(n+1)h)(x+nh)\cdots\underbrace{(x+(n+1)h-(n-1)h)}_{=(x+2h)}\right)$

(8) Kertomafunktion määr. $\left((x+h)=(x+(n+1)h-nh)\right)$

(9) Määritelmä 1.3.3.

Tehtävä 7. Tutkitaan, mitkä operaattoreista O, I, D, E ja Δ toteuttavat Leibnizin säännön ja mitkä ovat multiplikatiivisia. $A \in \mathcal{L}_S$ toteuttaa Leibnizin säännön, jos $A(fg) = fAg + gAf \ \forall f, g \in \tilde{\mathcal{F}}_S$ ja on multiplikatiivinen, jos $A(fg) = (Af)(Ag) \ \forall f, g \in \tilde{\mathcal{F}}_S$.

Olk. nyt $f, g \in \tilde{\mathcal{F}}_S$ ja $x \in S$.

Operaattori O: $(Of(x) = 0)$

Toteuttaa L:n säännön, sillä

$$O(fg)(x) = 0 = f(x)\cdot 0 + g(x)\cdot 0 = f(x)(Og(x)) + g(x)(Of(x)).$$

On multiplik., sillä

$$O(fg)(x) = 0 = 0\cdot 0 = (Of(x))(Og(x)) = ((Of)(Og))(x)$$

Operaattori I: $(If(x) = f(x))$

Ei toteuta L:n sääntöä, sillä

$$I(fg)(x) = (fg)(x) = f(x)g(x),$$

$$f(x)(Ig(x)) + g(x)(If(x)) = f(x)g(x) + g(x)f(x) = 2f(x)g(x)$$

ja jos esim. $f(x) = g(x) = x$, niin $f(x)g(x) = x^2$
$\neq 2x^2 = 2f(x)g(x)$.

On multiplik., sillä

$$I(fg)(x) = (fg)(x) = f(x)g(x) = (If(x))(Ig(x)) = ((If)(Ig))(x)$$

Operaattori D: $(Df(x)=f'(x))$

Toteuttaa L:n säännön, sillä

$D(fg)(x)=(fg)'(x)=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$

$=f(x)Dg(x)+g(x)Df(x)=(fDg+gDf)(x)$

Ei ole multiplik., sillä jos esim. $f(x)=g(x)=x$,

niin $Df(x)Dg(x)=f'(x)g'(x)=1\cdot 1=1\neq 2x=x+x$

$=f(x)+g(x)=f(x)\cdot 1+g(x)\cdot 1=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)=D(fg)(x)$.

Operaattori E: $(Ef(x)=f(x+h))$

Ei toteuta L:n sääntöä, sillä jos esim.

$f(x)=g(x)=x$, niin $E(fg)(x)=(fg)(x+h)=f(x+h)g(x+h)$

$=(x+h)^2$ ja $(fEg+gEf)(x)=f(x)(Eg(x))+g(x)(Ef(x))$

$=f(x)g(x+h)+g(x)f(x+h)=2x(x+h)=2x^2+2xh$, joten

$E(fg)\neq fEg+gEf$.

On multiplik., sillä $E(fg)(x)=(fg)(x+h)$

$=f(x+h)g(x+h)=(Ef(x))(Eg(x))=((Ef)(Eg))(x)$.

Operaattori Δ: $(\Delta f(x)=f(x+h)-f(x))$

Ei toteuta L:n sääntöä eikä ole multiplik.,

sillä jos jälleen $f(x)=g(x)=x$, niin

(jatkuu)

$$\Delta(fg)(x) = (fg)(x+h) - (fg)(x)$$
$$= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)$$
$$= (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2hx + h^2 - x^2 = 2hx + h^2$$

$$(f\Delta g + g\Delta f)(x) = f(x)(\Delta g(x)) + g(x)(\Delta f(x))$$
$$= f(x)(g(x+h) - g(x)) + g(x)(f(x+h) - f(x))$$
$$= x(\cancel{x}+h-\cancel{x}) + x(\cancel{x}+h-\cancel{x}) = 2hx$$

$$((\Delta f)(\Delta g))(x) = (\Delta f(x))(\Delta g(x))$$
$$= (f(x+h) - f(x))(g(x+h) - g(x))$$
$$= (\cancel{x}+h-\cancel{x})(\cancel{x}+h-\cancel{x}) = h^2$$

Täten siis $\Delta(fg) \neq f\Delta g + g\Delta f$ ja $\Delta(fg) \neq (\Delta f)(\Delta g)$.

Operaattori $A : \mathcal{F}_s \to \mathcal{F}_s$ on <u>additiivinen</u>, jos $A(f+g) = Af + Ag$ jokaisella $f, g \in \mathcal{F}_s$. Lineaariset operaattorit ovat additiivisia, joten koska tutkitut operaattorit O, I, D, E ja Δ ovat lineaarisia, niin ne ovat myös additiivisia.