TAMPEREEN YLIOPISTO
Luonnontieteiden tiedekunta

Lineaarialgebra 1B

Pentti Haukkanen

Puhtaaksikirjoitus: Joona Hirvonen

Sisältö

Luku 1

Vektoriavaruudet

1.1 Määritelmä

Määritelmä 1.1.1. Olkoon V epätyhjä joukko, jossa on määritelty kaksi operaatiota:

- yhteenlasku $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ (kuvaus $V \times V \to V$)
- skalaarilla kertominen $k\boldsymbol{u}$ (kuvaus $\mathbb{R} \times V \to V$).

Kolmikkoa $(V, +, \cdot)$ sanotaan *vektoriavaruudeksi*, jos

(1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (kommutatiivisuus eli vaihdannaisuus)

(2) $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$ (assosiatiivisuus eli liitännäisyys)

(3) $\exists \mathbf{0} \in V : \forall \boldsymbol{u} \in V : \boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ (nolla-alkio)

(4) $\forall \boldsymbol{u} \in V : \exists -\boldsymbol{u} \in V : \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ (vasta-alkio)

(5) $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$

(6) $(k + l)\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{u}$

(7) $k(l\boldsymbol{u}) = (kl)\boldsymbol{u}$

(8) $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

aina, kun $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ ja $k, l \in \mathbb{R}$. Alkioita $\boldsymbol{u} \in V$ sanotaan *vektoreiksi.* Vektori $\mathbf{0} \in V$ on *nollavektori.* Vektori $-\boldsymbol{u} \in V$ on vektorin $\boldsymbol{u}$ *vastavektori.* Lukua $k \in \mathbb{R}$ sanotaan *skalaariksi.*

Huomautus. Kuten edellä skalaarilla kertomista $\cdot$ merkitään usein

$$k \cdot \boldsymbol{u} = k\boldsymbol{u}.$$

Huomautus. Usein puhutaan vektoriavaruuden $(V, +, \cdot)$ sijasta lyhyesti vain vektoriavaruudesta V.

Esimerkki 1.1.1. Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$ on vektoriavaruus, jossa laskutoimitukset ovat

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$$

ja

$$k\boldsymbol{u} = (ku_1, \ldots, ku_n),$$

kun $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $k \in \mathbb{R}$. (Merkitään $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, missä $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$.)

Esimerkki 1.1.2. Kokoa $m \times n$ olevien matriisien joukko $\mathbb{R}^{m\times n}$ on vektoriavaruus laskutoimituksilla

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

ja

$$kA = [ka_{ij}],$$

kun $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ja $k \in \mathbb{R}$. Kyseessä on ns. matriisiavaruus.

Esimerkki 1.1.3. Funktiojoukko

$$V = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ kuvaus}\}$$

on vektoriavaruus laskutoimituksilla

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

ja

$$(kf)(x) = k(f(x)),$$

kun $f, g \in V$ ja $k \in \mathbb{R}$. Kyseessä on ns. funktioavaruus. Merkitään

$$V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}.$$

Esimerkki 1.1.4. Vektoriavaruuksia ovat myös mm. tiettyjen

- differentiaaliyhtälöiden
- differenssiyhtälöiden
- lineaaristen yhtälöryhmien

ratkaisuavaruudet.

Esimerkki 1.1.5. Olkoon $V = \mathbb{R}^2$. Määritellään tässä joukossa laskutoimitukset

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

ja

$$k\boldsymbol{u} = (ku_1, u_2),$$

kun $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ ja $k \in \mathbb{R}$.

Onko V vektoriavaruus?

Ratkaisu. Tarkastellaan määritelmän 1.1.1 kohtaa (6). Nyt

$$\begin{aligned}(k+l)\boldsymbol{u} &= ((k+l)u_1, u_2)\\ &= (ku_1 + lu_1, u_2),\end{aligned}$$

mutta

$$\begin{aligned}k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{u} &= (ku_1, u_2) + (lu_1, u_2)\\ &= (ku_1 + lu_1, 2u_2).\end{aligned}$$

Tällöin valitsemalla esimerkiksi vektori $\boldsymbol{u} = (0,1)$ saadaan

$$(k+l)\boldsymbol{u} = (0,1) \neq (0,2) = k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{u}.$$

Siis kohta (6) ei ole voimassa, joten V ei ole vektoriavaruus.

Esimerkki 1.1.6. Olkoon $V = \mathbb{R}^2$. Määritellään tässä joukossa laskutoimitukset

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, 0)$$

ja

$$k\boldsymbol{u} = (ku_1, ku_2),$$

kun $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ ja $k \in \mathbb{R}$.

Onko V vektoriavaruus?

Ratkaisu. Tarkastellaan määritelmän 1.1.1 kohtaa (3). Tehdään vastaoletus, että $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ on avaruuden V nollavektori. Tällöin

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}.$$

Toisaalta

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &= (u_1, u_2) + (v_1, v_2)\\ &= (u_1 + v_1, 0).\end{aligned}$$

Tällöin valitsemalla esimerkiksi vektori $\boldsymbol{u} = (0,1)$ saadaan (riippumatta siitä, mikä v_1 on)

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (v_1, 0) \neq (0,1) = \boldsymbol{u},$$

mikä on ristiriita. Siis kohta (3) ei ole voimassa, joten V ei ole vektoriavaruus.

Algebraa

Lause 1.1.1. *Olkoon V vektoriavaruus. Silloin*

(1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$,

(2) $0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$,

(3) $k\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$,

(4) $(-k)\boldsymbol{u} = -(k\boldsymbol{u}) = k(-\boldsymbol{u})$,

(5) $k\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \Rightarrow k = 0$ *tai* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$,

(6) $k\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{v}$ *ja* $k \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$,

(7) $k\boldsymbol{u} = l\boldsymbol{u}$ *ja* $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0} \Rightarrow k = l$

aina, kun $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ *ja* $k, l \in \mathbb{R}$

Todistus. Todistetaan kohta (6). Olkoon $k\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{v}$ ja $k \neq 0$. Silloin

$$\begin{aligned} k\boldsymbol{u} &= k\boldsymbol{v} \\ k^{-1}(k\boldsymbol{u}) &= k^{-1}(k\boldsymbol{v}) \\ (k^{-1}k)\boldsymbol{u} &= (k^{-1}k)\boldsymbol{v} \\ 1\boldsymbol{u} &= 1\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{v}. \end{aligned}$$

Todistetaan sitten kohta (7). Olkoon $k\boldsymbol{u} = l\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$. Silloin

$$\begin{aligned} k\boldsymbol{u} &= l\boldsymbol{u} \\ k\boldsymbol{u} + (-(l\boldsymbol{u})) &= l\boldsymbol{u} + (-(l\boldsymbol{u})) \\ k\boldsymbol{u} + (-l)\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{0} \\ (k + (-l))\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{0} \\ k + (-l) &= 0 \\ k &= l. \end{aligned}$$

Muut kohdat ovat harjoitustehtäviä. □

Määritelmä 1.1.2. Olkoon V vektoriavaruus. Silloin vektoreiden $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ *erotus* on

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v}).$$

Esimerkki 1.1.7. Olkoot f ja g reaalifunktiota. Voidaan todistaa, että $(-g)(x) = -(g(x))$. Näin ollen

$$\begin{aligned} (f - g)(x) &= (f + (-g))(x) \\ &= f(x) + (-g)(x) \\ &= f(x) + (-g(x)) \\ &= f(x) - g(x). \end{aligned}$$

Esimerkki 1.1.8. Olkoot A ja B $m \times n$–matriiseja. Silloin

$$A - B = A + (-B) = [a_{ij}] + [-b_{ij}] = [a_{ij} + (-b_{ij})] = [a_{ij} - b_{ij}]\,.$$

1.2 Aliavaruudet

Määritelmä 1.2.1. Olkoon V vektoriavaruus ja $\emptyset \neq W \subseteq V$. Silloin W on avaruuden V *aliavaruus*, jos W on vektoriavaruus avaruuden V operaatioiden suhteen.

Lause 1.2.1 (Aliavaruuskriteeri)**.** *Olkoon V vektoriavaruus ja $\emptyset \neq W \subseteq V$ sen osajoukko. Silloin W on avaruuden V aliavaruus, jos ja vain jos*

(i) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$*,*

(ii) $k\boldsymbol{u} \in W$

aina, kun $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$ *ja* $k \in \mathbb{R}$*.*

Todistus. Oletetaan ensin, että W on avaruuden V aliavaruus. Tällöin saadaan operaatiot

$$+ : W \times W \to W \text{ ja } \cdot : \mathbb{R} \times W \to W,$$

joten kohdat (i) ja (ii) ovat voimassa.

Oletetaan sitten, että kohdat (i) ja (ii) ovat voimassa. Määritelmän 1.1.1 kohdat (1) ja (2) sekä (5)–(6) ovat selvästi voimassa, koska ne pätevät alkuperäisen avaruuden V operaatioille. Pitää siis tutkia kohtia (3) ja (4). Oletuksesta seuraa, että rajoittamalla alkuperäisen avaruuden V operaatioita saadaan operaatiot

$$+ : W \times W \to W \text{ ja } \cdot : \mathbb{R} \times W \to W.$$

Nyt $W \neq \emptyset$, joten on olemassa jokin $\boldsymbol{u} \in W$. Tällöin $0\boldsymbol{u} \in W$ ja $0\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$, joten $\mathbf{0} \in W$. Lisäksi kaikilla $\boldsymbol{u} \in W$ pätee, että $(-1)\boldsymbol{u} \in W$. Koska $(-1)\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$, niin $-\boldsymbol{u} \in W$. □

Esimerkki 1.2.1. Vektoriavaruuden V aliavaruuksia ovat esimerkiksi V ja $\{\mathbf{0}\}$.

Esimerkki 1.2.2. Olkoon

$$W = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Onko W avaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus?

Ratkaisu. Selvästi $\emptyset \neq W \subseteq \mathbb{R}^2$. Olkoot sitten $(s, 2s), (t, 2t) \in W$ ja olkoon $k \in \mathbb{R}$. Silloin

$$(s, 2s) + (t, 2t) = (s + t, 2s + 2t) = (s + t, 2(s + t)) \in W$$

ja

$$k(s, 2s) = (ks, k(2s)) = (ks, 2(ks)) \in W,$$

joten lauseen 1.2.1 nojalla W on aliavaruus.

Esimerkki 1.2.3. Olkoon

$$W = \{(x, 2x + 1) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Onko W avaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus?

Ratkaisu 1. Olkoon $(s, 2s + 1) \in W$. Jos $s = 0$, niin $2s + 1 = 1 \neq 0$. Siis $\mathbf{0} = (0, 0) \notin W$, joten W ei ole aliavaruus.

Ratkaisu 2. Vektori $(0, 1) = (0, 2 \cdot 0 + 1) \in W$ ja skalaari $2 \in \mathbb{R}$. Kuitenkin

$$2(0, 1) = (0, 2) \notin W,$$

joten lauseen 1.2.1 nojalla W ei ole aliavaruus.

Esimerkki 1.2.4. Lauseen 1.2.1 avulla voidaan osoittaa, että $n \times n$–diagonaalimatriisit muodostavat matriisiavaruuden $\mathbb{R}^{n\times n}$ aliavaruuden.

Esimerkki 1.2.5. Lauseen 1.2.1 avulla voidaan osoittaa, että polynomifunktiot muodostavat funktioavaruuden $\{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ kuvaus}\}$ aliavaruuden.

Esimerkki 1.2.6. Homogeenisen lineaarisen yhtälöryhmän

$$AX = \mathbf{0}$$

ratkaisut muodostavat vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{n\times 1}$ aliavaruuden, ns. ratkaisuavaruuden.

Todistus. Selvästi ratkaisut muodostavat joukon $\mathbb{R}^{n\times 1}$ epätyhjän osajoukon.

Olkoot X_1 ja X_2 yhtälöryhmän ratkaisuja. Silloin

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

joten $X_1 + X_2$ on yhtälöryhmän ratkaisu.

Olkoon sitten X yhtälöryhmän ratkaisu ja $k \in \mathbb{R}$. Silloin

$$A(kX) = kAX = k\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

joten kX on yhtälöryhmän ratkaisu. Siis lauseen 1.2.1 ehdot täyttyvät eli yhtälöryhmän ratkaisut muodostavat aliavaruuden. □

1.3 Virittäjät

Määritelmä 1.3.1. Olkoon V vektoriavaruus ja $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\} \subseteq V$. Merkitään

$$\mathrm{lin}(S) = \{k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n \mid k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}\}.$$

Vektoreita

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n$$

sanotaan vektoreiden $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ *lineaarikombinaatioiksi.*

Lause 1.3.1. *Olkoon V vektoriavaruus ja $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\} \subseteq V$. Silloin* $\text{lin}(S)$ *on suppein avaruuden V aliavaruus, joka sisältää joukon S.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että $\text{lin}(S)$ on aliavaruus. Sovelletaan aliavaruuskriteeriä (lause 1.2.1). Asettamalla $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ saadaan, että $\mathbf{0} \in \text{lin}(S)$, joten $\text{lin}(S) \neq \emptyset$. Koska vektoriavaruus on suljettu yhteenlaskun ja skalaarilla kertomisen suhteen, $\text{lin}(S) \subseteq V$. Siis aliavaruuskriteerin perusehto $\emptyset \neq \text{lin}(S) \subseteq V$ on voimassa.

Todistetaan sitten aliavaruuskriteerin ehdot (i) ja (ii). Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \text{lin}(S)$, ja olkoon $k \in \mathbb{R}$. Silloin

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &= (k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n) + (l_1\boldsymbol{v}_1 + l_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + l_n\boldsymbol{v}_n) \\ &= (k_1 + l_1)\boldsymbol{v}_1 + (k_2 + l_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (k_n + l_n)\boldsymbol{v}_n \\ &\in \text{lin}(S)\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}k\boldsymbol{u} &= k(k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n) \\ &= (kk_1)\boldsymbol{v}_1 + (kk_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (kk_n)\boldsymbol{v}_n \\ &\in \text{lin}(S),\end{aligned}$$

joten lauseen 1.2.1 nojalla $\text{lin}(S)$ on aliavaruus.

Osoitetaan sitten, että $\text{lin}(S)$ sisältää joukon S. Olkoon $\boldsymbol{v}_i \in S$. Silloin

$$\boldsymbol{v}_i = 0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + 0\boldsymbol{v}_{i-1} + 1\boldsymbol{v}_i + 0\boldsymbol{v}_{i+1} + \cdots + 0\boldsymbol{v}_n \in \text{lin}(S),$$

joten $\text{lin}(S)$ sisältää joukon S.

Osoitetaan lopuksi, että $\text{lin}(S)$ on suppein avaruuden V aliavaruus, joka sisältää joukon S. Olkoon W avaruuden V sellainen aliavaruus, että W sisältää joukon S. Valitaan mielivaltainen $\boldsymbol{u} \in \text{lin}(S)$. Siis

$$\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n.$$

Nyt $\boldsymbol{v}_i \in W$ ja $k_i \in \mathbb{R}$, joten $k_i\boldsymbol{v}_i \in W$ aina, kun $i \in \{1, \dots, n\}$. Edelleen tällöin

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n \in W,$$

joten $\boldsymbol{u} \in W$. Siis $\text{lin}(S) \subseteq W$ eli $\text{lin}(S)$ on suppein avaruuden V aliavaruus, joka sisältää joukon S. □

Määritelmä 1.3.2. Vektoriavaruutta $\text{lin}(S)$ sanotaan joukon S *virittämäksi* vektoriavaruudeksi. Merkitään myös

$$\text{span}(S) = \text{lin}(S).$$

Esimerkki 1.3.1. Olkoot $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \in \mathbb{R}^2$ sellaiset, että $\boldsymbol{i} = (1, 0)$ ja $\boldsymbol{j} = (0, 1)$. Silloin

$$\begin{aligned}\text{lin}\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\} &= \{k\boldsymbol{i} + l\boldsymbol{j} \mid k, l \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(k, 0) + (0, l) \mid k, l \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(k, l) \mid k, l \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

Esimerkki 1.3.2. Olkoot $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ sellaiset, että $\boldsymbol{u} \nparallel \boldsymbol{v}$. Silloin

$$\operatorname{lin}\{\boldsymbol{d}\} = \{s\boldsymbol{d} \mid s \in \mathbb{R}\}$$

on origon kautta kulkeva suora ja

$$\operatorname{lin}\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} = \{s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v} \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

on origon sisältävä taso.

1.4 Lineaarinen riippumattomuus

Määritelmä 1.4.1. Olkoon $S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} \subseteq V$. Silloin S on *lineaarisesti riippumaton*, jos

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; k_1 = \cdots = k_n = 0.$$

Muussa tapauksessa S on *lineaarisesti riippuva*.

Esimerkki 1.4.1. Joukot $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\} \subseteq \mathbb{R}^2$, $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ja

$$\{(1,0,0,\ldots,0,0), (0,1,0,\ldots,0,0), \ldots, (0,0,0,\ldots,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

ovat lineaarisesti riippumattomia.

Esimerkki 1.4.2. Onko

$$S = \{(1,1,1), (1,2,-1)\} \in \mathbb{R}^3$$

lineaarisesti riippumaton?

Ratkaisu. Oletetaan, että

$$k(1,1,1) + l(1,2,-1) = (0,0,0).$$

Siis

$$\begin{aligned}(k,k,k) + (l,2l,-l) &= (0,0,0)\\ (k+l, k+2l, k-l) &= (0,0,0).\end{aligned}$$

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} k + l = 0\\ k + 2l = 0\\ k - l = 0,\end{cases}$$

josta ratkaistaan $k = l = 0$. Siis S on lineaarisesti riippumaton.

Esimerkki 1.4.3. Onko

$$S = \{(1,2), (5,6), (3,2)\} \in \mathbb{R}^2$$

lineaarisesti riippumaton?

Ratkaisu. Oletetaan, että

$$k_1(1,2) + k_2(5,6) + k_3(3,2) = (0,0).$$

Siis

$$\begin{aligned}(k_1, 2k_1) + (5k_2, 6k_2) + (3k_3, 2k_3) &= (0,0)\\ (k_1 + 5k_2 + 3k_3, 2k_1 + 6k_2 + 2k_3) &= (0,0).\end{aligned}$$

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} k_1 + 5k_2 + 3k_3 = 0\\ 2k_1 + 6k_2 + 2k_3 = 0,\end{cases}$$

josta ratkaistaan $k_1 = 2k_3$ ja $k_2 = -k_3$. Siis esimerkiksi

$$2(1,2) - 1(5,6) + 1(3,2) = (0,0),$$

joten S on lineaarisesti riippuva.

Esimerkki 1.4.4. Olkoon $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ ja $S = \{f, g\} \subseteq V$, missä

$$f(x) = x \text{ ja } g(x) = \cos x.$$

Onko S lineaarisesti riippumaton?

Ratkaisu. Oletetaan, että

$$kf + lg = 0.$$

Siis

$$\begin{aligned}(kf + lg)(x) &= 0\\ kf(x) + lg(x) &= 0\\ kx + l\cos x &= 0\end{aligned}$$

aina, kun $x \in \mathbb{R}$. Täten erityisesti

$$\begin{cases} k0 + l\cos 0 = 0\\ k\frac{\pi}{2} + l\cos\frac{\pi}{2} = 0.\end{cases}$$

Tästä saadaan ratkaistua $k = l = 0$. Siis S on lineaarisesti riippumaton.

Esimerkki 1.4.5. Olkoot vektorit $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ lineaarisesti riippumattomia. Todista, että vektorit $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in V$ ovat lineaarisesti riippumattomia.

Todistus. Oletetaan, että

$$k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + l(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}.$$

Siis

$$\begin{aligned}k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v} + l\boldsymbol{u} - l\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{0}\\ (k+l)\boldsymbol{u} + (k-l)\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{0},\end{aligned}$$

josta saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} k + l = 0 \\ k - l = 0. \end{cases}$$

Tästä saadaan ratkaistua $k = l = 0$. Siis S on lineaarisesti riippumaton. □

Esimerkki 1.4.6. Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{z} \in V$. Todista, että vektorit $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}-\boldsymbol{u} \in V$ ovat lineaarisesti riippuvia.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 1.4.1. *Olkoon S äärellinen joukko, jossa on vähintään kaksi alkiota.*

(a) Joukko S on lineaarisesti riippuva, jos ja vain jos ainakin yksi sen vektori voidaan esittää muiden sen vektorien lineaarikombinaationa.

(b) Joukko S on lineaarisesti riippumaton, jos ja vain jos mitään sen vektoria ei voida esittää muiden sen vektorien lineaarikombinaationa.

Todistus. Merkitään $S = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$, missä $n \geq 2$.

Todistetaan ensin kohta (a). Oletetaan ensin, että S on lineaarisesti riippuva. Määritelmän mukaan on olemassa sellaiset luvut $k_1, \dots, k_n$, että

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0},$$

missä $k_j \neq 0$ jollain indeksin $j \in \{1, \dots, n\}$ arvolla. Tällöin

$$\begin{aligned} -k_j\boldsymbol{v}_j &= k_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_{j-1}\boldsymbol{v}_{j-1} + k_{j+1}\boldsymbol{v}_{j+1} + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n \\ \boldsymbol{v}_j &= -\frac{k_1}{k_j}\boldsymbol{v}_1 - \cdots - \frac{k_{j-1}}{k_j}\boldsymbol{v}_{j-1} - \frac{k_{j+1}}{k_j}\boldsymbol{v}_{j+1} - \cdots - \frac{k_n}{k_j}\boldsymbol{v}_n. \end{aligned}$$

Siis $\boldsymbol{v}_j$ voidaan esittään vektorien $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{j-1}, \boldsymbol{v}_{j+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n$ lineaarikombinaationa.

Oletetaan sitten, että ainakin yksi joukon S vektori voidaan esittää muiden sen vektorien lineaarikombinaationa. Merkitään, että tämä vektori on $\boldsymbol{v}_j$. Siis

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_j &= k_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_{j-1}\boldsymbol{v}_{j-1} + k_{j+1}\boldsymbol{v}_{j+1} + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n \\ \boldsymbol{0} &= k_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_{j-1}\boldsymbol{v}_{j-1} - \boldsymbol{v}_j + k_{j+1}\boldsymbol{v}_{j+1} + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n \\ \boldsymbol{0} &= k_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_{j-1}\boldsymbol{v}_{j-1} + (-1)\boldsymbol{v}_j + k_{j+1}\boldsymbol{v}_{j+1} + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n. \end{aligned}$$

Nyt $\boldsymbol{0}$ on esitetty joukon S lineaarikombinaationa siten, että $k_j = -1 \neq 0$, joten S on lineaarisesti riippuva.

Kohta (b) yhtäpitävä kohdan (a) kanssa. □

Huomautus. Yhden alkion joukko $\{\boldsymbol{v}_1\}$ on lineaarisesti riippuva, jos ja vain jos $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$.

Huomautus. Vektorit $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{R}^n$ ovat lineaarisesti riippuvia täsmälleen silloin, kun niistä muodostetun matriisin determinantti on nolla.

1.5 Kanta

Määritelmä 1.5.1. Olkoon $S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} \subseteq V$ $(\neq \{\mathbf{0}\})$. Silloin S on vektoriavaruuden V *kanta*, jos

(1) S virittää vektoriavaruuden V,

(2) S on lineaarisesti riippumaton.

Esimerkki 1.5.1. Joukko $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta, joukko $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta ja joukko

$$\{(1,0,0,\ldots,0,0), (0,1,0,\ldots,0,0), \ldots, (0,0,0,\ldots,0,1)\}$$

on avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanta, ns. luonnollinen kanta.

Esimerkki 1.5.2. Joukko

$$S = \{(1,2), (3,2)\}$$

on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.

Todistus. Osoitetaan ensin, että S virittää avaruuden $\mathbb{R}^2$. Valitaan mielivaltainen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ja merkitään

$$(x, y) = k(1,2) + l(3,2).$$

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} k + 3l = x \\ 2k + 2l = y, \end{cases}$$

josta saadaan ratkaistua

$$\begin{cases} k = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y \\ l = \quad \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y. \end{cases}$$

Siis $(x, y) \in \mathrm{lin}(S)$, joten $\mathrm{lin}(S) = \mathbb{R}^2$.

Joukon S lineaarisen riippumattomuuden todistus on harjoitustehtävä. $\square$

Esimerkki 1.5.3. Määritä yhtälöryhmän $AX = \mathbf{0}$ ratkaisuavaruus ja sen kanta, kun

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ratkaisu. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 8x_4 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 8x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_4 = -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_1 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3. \end{cases}$$

Nyt parametrisoimalla $x_2 = 2t$ ja $x_3 = 2s$ saadaan ratkaisuksi

$$\begin{cases} x_1 = -t + s \\ x_2 = 2t \\ x_3 = 2s \\ x_4 = -t - s. \end{cases}$$

Siis ratkaisumatriisi X on

$$X = \begin{bmatrix} -t+s \\ 2t \\ 2s \\ -t-s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ 2t \\ 0 \\ -t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 2s \\ -s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Tästä saadaan ratkaisuavaruus

$$V = \left\{ t\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \;\middle|\; t, s \in \mathbb{R} \right\},$$

jonka kanta on

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Esimerkki 1.5.4. Olkoon A kuten edellisessä esimerkissä. Tarkastellaan lineaarista yhtälöryhmää

$$AX = B,$$

missä

$$B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Tälle yhtälöryhmälle saadaan helposti yksittäisratkaisu

$$X_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Edellisestä esimerkistä puolestaan saadaan homogeenisen yhtälöryhmän ratkaisu X_h. Siis yhtälöryhmän $AX = B$ ratkaisu on (harj.)

$$X = X_p + X_h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 1.5.5. Matriisiavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ”luonnollinen” kanta on

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Esimerkki 1.5.6. Olkoon S lineaarisesti riippumaton joukko. Silloin S on avaruuden $\mathrm{lin}(S)$ kanta.

1.6 Dimensio

Määritelmä 1.6.1. Olkoon V vektoriavaruus. Jos avaruudella V on äärellinen kanta, niin sanotaan, että V on *äärellisdimensioinen* (tai *äärellisulotteinen*). Muussa tapauksessa V on *ääretöndimensioinen* (tai *ääretönulotteinen*).

Esimerkki 1.6.1. Avaruus $\mathbb{R}^n$ on äärellisdimensioinen ja avaruus

$$\mathbb{R}^\infty = \{(a_1, a_2, \dots) \mid a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}\}$$

on ääretöndimensioinen.

Merkintä. Äärellisen joukon S alkioiden lukumäärää merkitään notaatiolla $|S|$.

Apulause 1.6.1. *Olkoon V vektoriavaruus, S sen kanta ja*

$$|S| = n < \infty.$$

Olkoon $S' \subseteq V$ äärellinen. Tällöin

(1) jos $|S'| > |S| = n$, niin S' on lineaarisesti riippuva,

(2) jos S' on lineaarisesti riippumaton, niin $|S'| \leq |S| = n$.

Todistus. Todistetaan kohta (1). Oletetaan, että $|S'| > |S| = n$. Merkitään $S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ ja $S' = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$. Joukko S on kanta, joten jokainen joukon S' vektori voidaan lausua muodossa

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= a_{11}\boldsymbol{v}_1 + \ldots + a_{n1}\boldsymbol{v}_n \\
\boldsymbol{w}_2 &= a_{12}\boldsymbol{v}_1 + \ldots + a_{n2}\boldsymbol{v}_n \\
&\vdots \\
\boldsymbol{w}_m &= a_{1m}\boldsymbol{v}_1 + \ldots + a_{nm}\boldsymbol{v}_n.
\end{aligned}$$

Oletetaan, että

$$k_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{w}_m = \mathbf{0}.$$

Kirjoittamalla joukon S' vektorit joukon S vektoreiden avulla saadaan

$$\begin{aligned}
k_1(a_{11}\boldsymbol{v}_1 + \ldots + a_{n1}\boldsymbol{v}_n) &+ \\
k_2(a_{12}\boldsymbol{v}_1 + \ldots + a_{n2}\boldsymbol{v}_n) &+ \\
&\vdots \\
k_m(a_{1m}\boldsymbol{v}_1 + \ldots + a_{nm}\boldsymbol{v}_n) &= \mathbf{0},
\end{aligned}$$

joka voidaan edelleen muokata muotoon

$$\begin{aligned}
(k_1a_{11} + \ldots + k_ma_{1m})\boldsymbol{v}_1 &+ \\
(k_1a_{21} + \ldots + k_ma_{2m})\boldsymbol{v}_2 &+ \\
&\vdots \\
(k_1a_{n1} + \ldots + k_ma_{nm})\boldsymbol{v}_n &= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Koska S on lineaarisesti riippumaton, niin edellinen yhtälö on yhtäpitävä seuraavan yhtälöryhmän kanssa

$$\begin{cases}
a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \ldots + a_{1m}k_m = 0 \\
a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \ldots + a_{2m}k_m = 0 \\
\quad\vdots \\
a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \ldots + a_{nm}k_m = 0.
\end{cases}$$

Tuntemattomia muuttujia k_i (m kpl) on oletuksen mukaan enemmän kuin yhtälöitä (n kpl), joten yhtälöryhmällä on epätriviaaleja ratkaisuja. Siis S' on lineaarisesti riippuva.

Kohta (2) on loogisesti ekvivalentti kohdan (1) kanssa. □

Lause 1.6.1. *Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus. Silloin sen jokaisessa kannassa on yhtä monta vektoria.*

Todistus. Olkoot S ja S' avaruuden V kantoja. Nyt S on kanta ja S' lineaarisesti riippumaton, joten apulauseen 1.6.1 nojalla

$$|S'| \leq |S|.$$

Vastaavasti S' on kanta ja S lineaarisesti riippumaton, joten apulauseen 1.6.1 nojalla

$$|S| \leq |S'| .$$

Siis $|S| = |S'|$. $\square$

Määritelmä 1.6.2. Olkoon V vektoriavaruus, S sen kanta ja $|S| = n < \infty$. Sanotaan, että vektoriavaruuden V *dimensio* (*ulottuvuus*) on n tai että V on n*–dimensioinen* (tai n*–ulotteinen*). Merkitään

$$\dim(V) = n.$$

Esimerkki 1.6.2. Esimerkiksi

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$

ja

$$\dim(\mathbb{R}^{m\times n}) = mn.$$

Jälkimmäisen todistus on harjoitustehtävä.

Esimerkki 1.6.3. Olkoon $\mathcal{P}_n$ korkeintaan n–asteisten polynomien vektoriavaruus. Silloin sen yksi kanta on

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\},$$

joten

$$\dim(\mathcal{P}_n) = n + 1.$$

Esimerkki 1.6.4. Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ sellaiset, että $\boldsymbol{u} \nparallel \boldsymbol{v}$. Silloin jos $V = \operatorname{lin}\{\boldsymbol{u}\}$, niin

$$\dim(V) = 1,$$

ja jos $U = \operatorname{lin}\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$, niin

$$\dim(U) = 2.$$

Apulause 1.6.2. *Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus ja* $\dim(V) > 1$. *Olkoon S vektoriavaruuden V sellainen lineaarisesti riippumaton osajoukko, joka ei viritä avaruutta V. Olkoon $\boldsymbol{v} \in V \setminus \operatorname{lin}(S)$. Silloin $S \cup \{\boldsymbol{v}\}$ on lineaarisesti riippumaton.*

Apulause 1.6.3. *Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus. Olkoon S vektoriavaruuden V sellainen äärellinen osajoukko, joka virittää avaruuden V. Oletetaan, että joukon S jokin vektori $\boldsymbol{v}_i$ voidaan esittää joukon S muiden vektoreiden lineaarikombinaationa. Silloin $S \setminus \{\boldsymbol{v}_i\}$ virittää avaruuden V.*

Apulause 1.6.4. *Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus, ja olkoon* $\dim(V) = n$. *Olkoon S vektoriavaruuden V sellainen äärellinen osajoukko, joka virittää avaruuden V. Silloin $|S| \geq n$.*

Lause 1.6.2. *Olkoon V vektoriavaruus,* $\dim(V) = n$ *ja* $S \subseteq V$*. Silloin jos ehdoista*

(1) $\mathrm{lin}(S) = V$*,*

(2) S *lineaarisesti riippumaton,*

(3) $|S| = n$

kaksi on voimassa, niin S on kanta.

Todistus. Oletetaan ensin, että kohdat (1) ja (2) ovat voimassa. Tällöin määritelmän 1.5.1 nojalla S on kanta.

Oletetaan sitten, että ehdot (2) ja (3) ovat voimassa. Pitää siis osoittaa, että $\mathrm{lin}(S) = V$. Tehdään vastaoletus, että on olemassa sellainen $\boldsymbol{v} \in V$, että $\boldsymbol{v} \notin \mathrm{lin}(S)$. Tällöin apulauseen 1.6.2 nojalla $S \cup \{\boldsymbol{v}\}$ on lineaarisesti riippumaton ja apulauseen 1.6.1 nojalla $n + 1 = |S \cup \{\boldsymbol{v}\}| \leq n$, mikä on ristiriita. Siis vastaoletus on väärin ja väite pätee.

Oletetaan lopuksi, että kohdat (1) ja (3) ovat voimassa. Tämän osan todistus on harjoitustehtävä. □

Esimerkki 1.6.5. Olkoon $\boldsymbol{u} = (1, 0)$ ja $\boldsymbol{v} = (1, 1)$. Silloin

$$S = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$$

on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.

Todistus. Koska $|S| = 2$, niin lauseen 1.6.2 nojalla riittää osoittaa, että S on lineaarisesti riippumaton. Oletetaan tätä varten, että

$$k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}.$$

Siis saadaan yhtälö

$$(k + l, l) = (0, 0),$$

jonka ainoa ratkaisu on $k = l = 0$, joten S on lineaarisesti riippumaton. □

Lause 1.6.3. *Olkoon V vektoriavaruus,* $\dim(V) = n$ *ja* $S \subseteq V$*.*

1. *Jos S on lineaarisesti riippumaton ja $|S| < n$, niin joukko S voidaan täydentää avaruuden V kannaksi.*

2. *Jos* $\mathrm{lin}(S) = V$ *ja $|S| > n$, niin on olemassa joukon S osajoukko, joka on avaruuden V kanta.*

Todistus. Luennoilla. □

Esimerkki 1.6.6. Joukko $S = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\}$ on lineaarisesti riippumaton ja $|S| = 2 < 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, joten S voidaan täydentää avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannaksi. Esimerkiksi

$$S \cup \{\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\}$$

on avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta.

Esimerkki 1.6.7. Olkoon $S = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$. Silloin $\text{lin}(S) = \mathbb{R}^3$ ja $|S| = 4 > 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, joten on olemassa joukon S osajoukko, joka on avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta. Esimerkiksi

$$S' = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\} \subseteq S$$

on avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta.

1.7 Koordinaatit

Lause 1.7.1. *Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus ja $S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ sen kanta. Silloin jokaista vektoria $\boldsymbol{v} \in V$ kohti on olemassa sellaiset yksikäsitteiset luvut $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, että*

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n.$$

Todistus. Kanta S virittää avaruuden V, joten lukujen $c_1, \ldots, c_n$ olemassaolo on selvä. Oletetaan, että

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$$

ja

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n.$$

Vähentämällä nämä puolittain saadaan

$$\boldsymbol{0} = (c_1 - k_1)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (c_n - k_n)\boldsymbol{v}_n.$$

Kanta S on lineaarisesti riippumaton, joten

$$c_1 - k_1 = 0, \ldots, c_n - k_n = 0,$$

mistä edelleen seuraa, että

$$c_1 = k_1, \ldots, c_n = k_n.$$

Siis $c_1, \ldots, c_n$ ovat yksikäsitteiset. □

Määritelmä 1.7.1. Olkoon V vektoriavaruus ja $S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ sen *järjestetty* kanta. Lauseen 1.7.1 skalaareja $c_1, \ldots, c_n$ sanotaan vektorin $\boldsymbol{v}$ *koordinaateiksi* kannan S suhteen. *Koordinaattivektori* kannan S suhteen on

$$(\boldsymbol{v})_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}.$$

Huomautus. Tästä lähtien kannasta puhuttaessa tarkoitetaan aina järjestettyä kantaa.

Huomautus. Vektori $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ samaistetaan matriisin

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

kanssa. Siis merkitään

$$(v_1, \dots, v_n) = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 1.7.1. Joukot $S_1 = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ ja $S_2 = \{(2,0), (0,3)\}$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^2$ kantoja. Silloin

$$\boldsymbol{v} = (x, y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j},$$

joten

$$(\boldsymbol{v})_{S_1} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

ja

$$\boldsymbol{v} = (x, y) = \frac{x}{2}(0, 2) + \frac{y}{3}(0, 3),$$

joten

$$(\boldsymbol{v})_{S_2} = \begin{bmatrix} \frac{x}{2} \\ \frac{y}{3} \end{bmatrix}.$$

Huomautus. Jos kantaa ei erikseen mainita, tutkitaan luonnollista kantaa.

Esimerkki 1.7.2. Tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ luonnollista kantaa

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Tällöin

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right)_S = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1}.$$

1.8 Kannan vaihto

Olkoot $S = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ ja $S' = \{\boldsymbol{v}'_1, \dots, \boldsymbol{v}'_n\}$ kaksi vektoriavaruuden V kantaa. Silloin, kun $\boldsymbol{v} \in V$,

$$(\boldsymbol{v})_{S'} = P(\boldsymbol{v})_S,$$

missä

$$P = \left[(\boldsymbol{v}_1)_{S'} \;\vdots\; (\boldsymbol{v}_2)_{S'} \;\vdots\; \dots \;\vdots\; (\boldsymbol{v}_n)_{S'} \right].$$

Matriisia P sanotaan *kannanmuunnosmatriisiksi* kannalta S kannalle S'.

Todistus. Todistetaan tapaus $n = 2$. Olkoot $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ ja $S' = \{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2\}$ vektoriavaruuden V kaksi kantaa. Merkitään

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = a\boldsymbol{v}'_1 + b\boldsymbol{v}'_2 \\ \boldsymbol{v}_2 = c\boldsymbol{v}'_1 + d\boldsymbol{v}'_2, \end{cases}$$

jolloin

$$(\boldsymbol{v}_1)_{S'} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ ja } (\boldsymbol{v}_2)_{S'} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}.$$

Siis

$$P = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Merkitään

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2,$$

jolloin

$$(\boldsymbol{v})_S = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}.$$

Nyt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 \\ &= k_1(a\boldsymbol{v}'_1 + b\boldsymbol{v}'_2) + k_2(c\boldsymbol{v}'_1 + d\boldsymbol{v}'_2) \\ &= (k_1a + k_2c)\boldsymbol{v}'_1 + (k_1b + k_2d)\boldsymbol{v}'_2, \end{aligned}$$

joten

$$(\boldsymbol{v})_{S'} = \begin{bmatrix} k_1a + k_2c \\ k_1b + k_2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = P(\boldsymbol{v})_S.$$

□

Esimerkki 1.8.1. Joukot $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\} = \{(1,1), (2,1)\}$ ja $S' = \{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2\} = \{(1,0), (0,1)\}$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^2$ kaksi kantaa. Silloin kannanmuunnosmatriisi kannalta S kannalle S' on

$$P = \left[(\boldsymbol{v}_1)_{S'} \;\vdots\; (\boldsymbol{v}_2)_{S'} \right].$$

Nyt

$$\boldsymbol{v}_1 = (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1) = 1\boldsymbol{v}'_1 + 1\boldsymbol{v}'_2,$$

joten

$$(\boldsymbol{v}_1)_{S'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ja

$$\boldsymbol{v}_2 = (2,1) = 2(1,0) + 1(0,1) = 2\boldsymbol{v}'_1 + 1\boldsymbol{v}'_2,$$

joten

$$(\boldsymbol{v}_2)_{S'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Siis

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tällöin esimerkiksi

$$P(\boldsymbol{v}_2)_S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{v}_2)_{S'}.$$

Lause 1.8.1. *Olkoon P kannanmuunnosmatriisi kannalta S kannalle S'. Silloin*

(1) P on kääntyvä,

(2) P^{-1} kannanmuunnosmatriisi kannalta S' kannalle S.

Todistus. Kohdan (1) todistus sivuutetaan. Todistetaan kohta (2). Nyt

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{v})_{S'} = P(\boldsymbol{v})_S &\Leftrightarrow P^{-1}(\boldsymbol{v})_{S'} = P^{-1}P(\boldsymbol{v})_S \\ &\Leftrightarrow P^{-1}(\boldsymbol{v})_{S'} = (\boldsymbol{v})_S \\ &\Leftrightarrow (\boldsymbol{v})_S = P^{-1}(\boldsymbol{v})_{S'}. \end{aligned}$$

□

Luku 2

Sisätuloavaruudet

2.1 Määritelmä

Määritelmä 2.1.1. Olkoon V vektoriavaruus. Silloin kuvausta $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ sanotaan *sisätuloksi*, jos

(1) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$,

(2) $\langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$,

(3) $\langle k\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = k\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$,

(4) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \geq 0$ ja $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

aina, kun $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ ja $k \in \mathbb{R}$. Vektoriavaruutta sanotaan *sisätuloavaruudeksi*, jos siinä on määritelty sisätulo.

Esimerkki 2.1.1. Olkoon $V = \mathbb{R}^n$ euklidinen avaruus. Määritellään

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n,$$

missä $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ ja $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$. Silloin $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on sisätulo, ns. euklidinen sisätulo, ja $\mathbb{R}^n$ on sisätuloavaruus.

Todistus. Oletetaan, että $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ ja $k \in \mathbb{R}$. Tällöin

(1) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$,

(2) $\langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$,

(3) $\langle k\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = (k\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = k(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) = k\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$,

(4) $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \geq 0$ ja $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

$\square$

Esimerkki 2.1.2. Olkoon $V = \mathbb{R}^2$. Silloin painotettu pistetulo

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = u_1 v_1 + 2 u_2 v_2$$

on sisätulo.

Todistus. Oletetaan, että $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ ja $k \in \mathbb{R}$. Tällöin

(1) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = u_1 v_1 + 2 u_2 v_2 = v_1 u_1 + 2 v_2 u_2 = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$.

Muut kohdat ovat harjoitustehtäviä. □

Esimerkki 2.1.3. Olkoon $V = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ kuvaus}\}$ sopiva funktioavaruus. Tällöin

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

on sisätulo.

Todistus. Sivuutetaan. □

2.2 Algebrallisia ominaisuuksia

Lause 2.2.1. *Olkoon V sisätuloavaruus. Silloin*

(a) $\langle \mathbf{0}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \mathbf{0} \rangle = 0$,

(b) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle$,

(c) $\langle \boldsymbol{u}, k\boldsymbol{v} \rangle = k \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$

aina, kun $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ ja $k \in \mathbb{R}$.

Todistus. Oletetaan, että $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ ja $k \in \mathbb{R}$. Osoitetaan ensin (a)–kohta. Nyt

$$\langle \mathbf{0}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \mathbf{0} + \mathbf{0}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \mathbf{0}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \mathbf{0}, \boldsymbol{v} \rangle,$$

joten $\langle \mathbf{0}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$. Koska

$$\langle \mathbf{0}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \mathbf{0} \rangle,$$

niin (a)–kohta pätee.

Kohtien (b) ja (c) todistukset ovat harjoitustehtäviä. □

2.3 Pituus ja kulma

Oletetaan tästä eteenpäin, että vektoriavaruus V on aina sisätuloavaruus.

Määritelmä 2.3.1. Vektorin $\boldsymbol{u}$ *normi* (eli *pituus*) $\|\boldsymbol{u}\|$ on

$$\|\boldsymbol{u}\| = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle}.$$

Vektoreiden $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ välinen *etäisyys* $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ on

$$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|.$$

Esimerkki 2.3.1. Olkoon $V = \mathbb{R}^n$ euklidinen avaruus. Tällöin

$$\|\boldsymbol{u}\| = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle^{\frac{1}{2}} = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u})^{\frac{1}{2}} = (u_1^2 + \cdots + u_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

ja

$$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| = ((u_1 - v_1)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Esimerkki 2.3.2. Olkoon $V = \mathbb{R}^2$ sisätuloavaruus, jossa sisätulona on painotettu pistetulo

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = u_1 v_1 + 2 u_2 v_2.$$

Silloin

$$\|\boldsymbol{u}\| = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u_1^2 + 2u_2^2}.$$

Esimerkiksi

$$\|(1,1)\| = \sqrt{1^2 + 2 \cdot 1^2} = \sqrt{3}.$$

Apulause 2.3.1 (Cauchy-Schwarz)**.** *Olkoot* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$*. Silloin*

$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle| \leq \|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\|.$$

Todistus. Sivuutetaan. □

Esimerkki 2.3.3. Euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ pätee

$$|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| = |\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle| \leq \|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\|.$$

Lause 2.3.1. *Olkoot* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$*, ja olkoon* $k \in \mathbb{R}$*. Silloin*

(1) $\|\boldsymbol{u}\| \geq 0$ *ja* $\|\boldsymbol{u}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$*,*

(2) $\|k\boldsymbol{u}\| = |k| \, \|\boldsymbol{u}\|$*,*

(3) $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ *(kolmioepäyhtälö).*

Todistus. Kohtien (1) ja (2) todistukset ovat harjoitustehtäviä. Todistetaan kohta (3). Nyt

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 &= \langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \\
&= \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + \|\boldsymbol{v}\|^2 \\
&\le \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\,\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{v}\|^2 \\
&= (\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|)^2,
\end{aligned}$$

josta saadaan

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| \le \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|\,.$$

□

Määritelmä 2.3.2. Vektoreiden $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ ja $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ välinen *kulma* θ määritellään kaavalla

$$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle}{\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|}, \quad \theta \in [0, \pi]\,.$$

Huomautus. Oletuksen nojalla $\|\boldsymbol{u}\|, \|\boldsymbol{v}\| \neq 0$, joten Cauchy-Schwarzin mukaan

$$\frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle}{\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|} \in [-1, 1]\,.$$

Siis määritelmä 2.3.2 on mielekäs.

Määritelmä 2.3.3. Vektorit $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ ovat *ortogonaaliset* (kohtisuorat), jos

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = 0.$$

Merkitään

$$\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}.$$

Lisäksi merkitään

$$\boldsymbol{u} \perp S,$$

jos $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ aina, kun $\boldsymbol{v} \in S$.

Huomautus. Vektorien välisen kulman määritelmästä seuraa, että

$$\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2},$$

kun $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$.

Esimerkki 2.3.4. Olkoon $V = \mathbb{R}^2$ euklidinen avaruus. Silloin

$$(1,1) \perp (-1,1),$$

koska

$$\langle (1,1), (-1,1) \rangle = (1,1) \cdot (-1,1) = 0.$$

Itse asiassa

$$(1,1) \perp (-x,x)$$

aina, kun $x \in \mathbb{R}$, sillä

$$\langle (1,1), (-x,x) \rangle = (1,1) \cdot (-x,x) = 1(-x) + 1x = 0.$$

Esimerkki 2.3.5. Olkoon $V = \mathbb{R}^2$ varustettuna painotetulla pistetulolla

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = u_1 v_1 + 2u_2 v_2.$$

Silloin

$$(1,1) \not\perp (-1,1),$$

koska

$$\langle (1,1), (-1,1) \rangle = 1(-1) + 2(1 \cdot 1) = 1 \neq 0.$$

Nyt

$$\|(1,1)\| = \sqrt{3} = \|(-1,1)\|,$$

joten

$$\cos\theta = \frac{\langle (1,1), (-1,1) \rangle}{\|(1,1)\| \, \|(-1,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

Siis

$$\theta \approx 70{,}5^\circ.$$

Lause 2.3.2 (Yleistetty Pythagoraan lause)**.** *Jos* $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$*, niin*

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2.$$

Todistus. Oletetaan, että $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 &= \langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \\
&= \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \|\boldsymbol{v}\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2 \cdot 0 + \|\boldsymbol{v}\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2.
\end{aligned}$$

□

2.4 Ortonormaalit joukot

Määritelmä 2.4.1. Olkoon $\emptyset \neq S \subseteq V$. Silloin joukko S on *ortogonaali* joukko, jos

$$\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$$

aina, kun $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in S$, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$. Jos lisäksi $\|\boldsymbol{u}\| = 1$ aina, kun $\boldsymbol{u} \in S$, niin S on *ortonormaali* joukko.

Huomautus. Usein sanotaan vain lyhyesti, että S on ortogonaali tai ortonormaali.

Esimerkki 2.4.1. Olkoon S ortogonaali ja $\mathbf{0} \notin S$. Silloin joukko

$$\left\{ \frac{1}{\|\boldsymbol{u}\|}\boldsymbol{u} \;\middle|\; \boldsymbol{u} \in S \right\}$$

on ortonormaali.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 2.4.2. Olkoon $\mathbb{R}^3$ euklidinen avaruus. Tällöin joukko $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ on ortonormaali. Yleisesti euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollinen kanta on ortonormaali.

Lause 2.4.1. *Olkoon $S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ avaruuden V ortonormaali kanta. Silloin*

$$\boldsymbol{u} = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1 + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_n \rangle \boldsymbol{v}_n$$

aina, kun $\boldsymbol{u} \in V$.

Todistus. Oletetaan, että $\boldsymbol{u} \in V$. Koska S on avaruuden V kanta, vektori $\boldsymbol{u}$ voidaan lausua muodossa

$$\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n.$$

Nyt saadaan, että

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_i \rangle &= \langle c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_i \rangle \\
&= c_1\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_i \rangle + \cdots + c_i\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i \rangle + \cdots + c_n\langle \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_i \rangle \\
&= c_1 0 + \cdots + c_i \left\|\boldsymbol{v_i}\right\|^2 + \cdots + c_n 0 \\
&= 0 + \cdots + c_i + \cdots + 0 \\
&= c_i,
\end{aligned}$$

missä $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tällöin

$$\boldsymbol{u} = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1 + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_n \rangle \boldsymbol{v}_n.$$

□

Huomautus. Ortonormaalin kannan tapauksessa vektorille $\boldsymbol{u}$ saadaan koordinaattivektori

$$(\boldsymbol{u})_S = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_n \rangle \end{bmatrix}$$

eli ns. *Fourier-kertoimet.* Esimerkin 2.4.1 avulla saadaan, että vektorin $\boldsymbol{u}$ koordinaattivektori ortogonaalin kannan suhteen on

$$(\boldsymbol{u})_S = \begin{bmatrix} \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2} \\ \vdots \\ \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_n \rangle}{\|\boldsymbol{v}_n\|^2} \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 2.4.3. Olkoon $\mathbb{R}^2$ vektoriavaruus ja $S = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ sen ortonormaali kanta. Tällöin $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ voidaan lausua muodossa

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{i})\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{j})\boldsymbol{j}.$$

Lause 2.4.2. *Olkoon $S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ ortogonaali joukko, ja olkoot $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \neq \boldsymbol{0}$. Silloin S on lineaarisesti riippumaton.*

Todistus. Oletetaan, että

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{0}.$$

Silloin

$$\langle k_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_i \rangle = \langle \boldsymbol{0}, \boldsymbol{v}_i \rangle = 0,$$

kun $i \in \{1, \ldots, m\}$. Toisaalta

$$\begin{aligned} \langle k_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_i \rangle &= k_1\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_i \rangle + \cdots + k_i\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i \rangle + \cdots + k_m\langle \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_i \rangle \\ &= k_1 0 + \cdots + k_i \|\boldsymbol{v_i}\|^2 + \cdots + k_m 0 \\ &= k_i \|\boldsymbol{v_i}\|^2, \end{aligned}$$

joten yhdistämällä nämä yhtälöt saadaan, että $k_i \|\boldsymbol{v_i}\|^2 = 0$, kun $i \in \{1, \ldots, m\}$. Koska $\|\boldsymbol{v_i}\|^2 \neq 0$, niin $k_i = 0$. Siis S on lineaarisesti riippumaton. □

Projektio

Määritelmä 2.4.2. Olkoon $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ avaruuden V ortogonaali joukko, missä $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \neq \boldsymbol{0}$. Olkoon

$$W = \operatorname{lin}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}.$$

Vektorin $\boldsymbol{u} \in V$ *projektio* aliavaruudelle W on

$$\operatorname{proj}_W(\boldsymbol{u}) = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_m \rangle}{\|\boldsymbol{v}_m\|^2}\boldsymbol{v}_m.$$

Huomautus. Olkoon S vektoriavaruuden V ortogonaali kanta ja $R \subseteq S$. Silloin

$$\mathrm{proj}_{\mathrm{lin}(R)}(\boldsymbol{u})$$

tarkoittaa, että vektorin $\boldsymbol{u}$ koordinaateista häviävät (eli saavat arvoksi 0) ne, jotka vastaavat joukosta R pois jääneitä vektoreita.

Esimerkki 2.4.4. Olkoon $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathrm{lin}\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ ja $\boldsymbol{u} = (x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Silloin

$$\begin{aligned} \mathrm{proj}_W(\boldsymbol{u}) &= \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{i}}{\|\boldsymbol{i}\|^2}\boldsymbol{i} + \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{j}}{\|\boldsymbol{j}\|^2}\boldsymbol{j} \\ &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}. \end{aligned}$$

Lause 2.4.3. *Olkoon $\boldsymbol{u} \in V$ ja $W = \mathrm{lin}(S)$, missä $S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ on ortogonaali joukko ja $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \neq \boldsymbol{0}$. Silloin*

$$(\boldsymbol{u} - \mathrm{proj}_W(\boldsymbol{u})) \perp W.$$

Todistus. Osoitetaan, että

$$\langle \boldsymbol{u} - \mathrm{proj}_W(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{w} \rangle = 0$$

aina, kun $\boldsymbol{w} \in W$. Harjoitustehtävä. □

Lause 2.4.4. *Jokaisella äärellisulotteisella sisätuloavaruudella ($\neq \{\boldsymbol{0}\}$) on ortonormaali kanta.*

Gram-Schmidtin prosessi. Olkoon $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ avaruuden V kanta. Ortogonaali kanta $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ saadaan seuraavasti:
Vaihe 1. Asetetaan

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1$$

ja

$$W_1 = \mathrm{lin}\{\boldsymbol{v}_1\}.$$

Vaihe 2. Asetetaan

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \mathrm{proj}_{W_1}(\boldsymbol{u}_2)$$

ja

$$W_2 = \mathrm{lin}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}.$$

Vaihe 3. Asetetaan

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \mathrm{proj}_{W_2}(\boldsymbol{u}_3)$$

ja

$$W_3 = \mathrm{lin}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}.$$

$\vdots$

Vaihe n-1. Asetetaan

$$\boldsymbol{v}_{n-1} = \boldsymbol{u}_{n-1} - \operatorname{proj}_{W_{n-2}}(\boldsymbol{u}_{n-1})$$

ja

$$W_{n-1} = \operatorname{lin}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}\}.$$

Vaihe n. Asetetaan

$$\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{u}_n - \operatorname{proj}_{W_{n-1}}(\boldsymbol{u}_n).$$

Lauseen 2.4.3 perusteella joukko $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ on ortogonaali. Lauseen 2.4.2 mukaan se on lineaarisesti riippumaton, joten lauseen 1.6.2 nojalla se on avaruuden V kanta. Lopuksi normeerataan saatu ortogonaali kanta, jolloin saadaan ortonormaali kanta

$$\left\{ \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1, \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_2\|}\boldsymbol{v}_2, \ldots, \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_n\|}\boldsymbol{v}_n \right\}.$$

□

Huomautus. Vektorit $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ voidaan vaihtoehtoisesti normeerata kussakin eri vaiheessa yksi kerrallaan.

Esimerkki 2.4.5. Olkoon $V = \mathbb{R}^3$ ja $S = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\}$. Ortogonalisoidaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta S.

Vaihe 1. Asetetaan

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{i}$$

ja

$$W_1 = \operatorname{lin}\{\boldsymbol{i}\}.$$

Vaihe 2. Asetetaan

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \operatorname{proj}_{W_1}(\boldsymbol{u}_2) = (\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}) - \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$$

ja

$$W_2 = \operatorname{lin}\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}.$$

Vaihe 3. Asetetaan

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \operatorname{proj}_{W_2}(\boldsymbol{u}_3) = (\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) - (\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{k}.$$

On saatu avaruuden $\mathbb{R}^3$ ortogonaali kanta $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$. Tämä kanta on itse asiassa ortonormaali, sillä $\|\boldsymbol{i}\| = \|\boldsymbol{j}\| = \|\boldsymbol{k}\| = 1$.

Luku 3

Lineaarikuvaukset

3.1 Määritelmä ja perusominaisuuksia

Määritelmä 3.1.1. Olkoot U ja V vektoriavaruuksia. Kuvausta $T : U \to V$ sanotaan *lineaarikuvaukseksi*, jos

(1) $T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}') = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{u}')$,

(2) $T(k\boldsymbol{u}) = kT(\boldsymbol{u})$

aina, kun $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \in U$ ja $k \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 3.1.1. Olkoon

$$T : U \to U, \quad T(\boldsymbol{u}) = k\boldsymbol{u}.$$

Voidaan osoittaa, että T on lineaarikuvaus. Jos $k > 1$, niin sanotaan, että T on *dilaatio*. Jos $0 < k < 1$, niin sanotaan, että T on *kontraktio*.

Esimerkki 3.1.2. Olkoon

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(\boldsymbol{u}) = T(u_1, u_2) = (-u_1, u_2).$$

Olkoot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \in \mathbb{R}^2$, ja olkoon $k \in \mathbb{R}$. Silloin

$$\begin{aligned}
T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}') &= T((u_1, u_2) + (u_1', u_2')) \\
&= T(u_1 + u_1', u_2 + u_2') \\
&= (-u_1 - u_1', u_2 + u_2') \\
&= (-u_1, u_2) + (-u_1', u_2') \\
&= T(u_1, u_2) + T(u_1', u_2') \\
&= T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{u}')
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} T(k\boldsymbol{u}) &= T(k(u_1, u_2)) \\ &= T(ku_1, ku_2) \\ &= (-ku_1, ku_2) \\ &= (k(-u_1), ku_2) \\ &= k(-u_1, u_2) \\ &= kT(u_1, u_2) \\ &= kT(\boldsymbol{u}), \end{aligned}$$

joten T on lineaarikuvaus.

Esimerkki 3.1.3 (Matriisikuvaus)**.** Olkoon A $m \times n$–matriisi. Silloin

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad T(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$$

on lineaarikuvaus, sillä

$$T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}') = A(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}') = A\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{u}' = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{u}')$$

ja

$$T(k\boldsymbol{u}) = A(k\boldsymbol{u}) = k(A\boldsymbol{u}) = kT(\boldsymbol{u}).$$

Esimerkki 3.1.4. Olkoon $A = I_2$. Silloin

$$T(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u} = I_2\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{u},$$

joten T on identtinen kuvaus.

Lause 3.1.1. *Olkoon $T : U \to V$ lineaarikuvaus. Silloin*

(a) $T(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$*,*

(b) $T(-\boldsymbol{u}) = -T(\boldsymbol{u})$*,*

(c) $T(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) = T(\boldsymbol{u}_1) - T(\boldsymbol{u}_2)$*,*

(d) $T(k_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{u}_m) = k_1T(\boldsymbol{u}_1) + \cdots + k_mT(\boldsymbol{u}_m)$

aina, kun $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \in U$ *ja* $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{R}$*.*

Todistus. Harjoitustehtävä □

Esimerkki 3.1.5. Onko

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x, y) = (x + 1, y + 1, 0)$$

lineaarikuvaus?

Ratkaisu. Ei ole, sillä

$$T(0,0) = (1,1,0) \neq (0,0,0).$$

Esimerkki 3.1.6. Onko

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x,y) = (xy,0,0)$$

lineaarikuvaus?

Ratkaisu. Lauseen 3.1.1 kohta (a) on voimassa. Kuitenkin

$$T(1,1) + T(1,1) = (1,0,0) + (1,0,0) = (2,0,0)$$

ja

$$T((1,1) + (1,1)) = T(2,2) = (4,0,0),$$

joten T ei ole lineaarikuvaus.

Huomautus. Lineaarikuvaus tunnetaan täydellisesti, jos tunnetaan kantavektoreiden kuvat.

Todistus. Olkoon $T : U \to V$ lineaarikuvaus ja $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ avaruuden U kanta. Olkoon $\boldsymbol{u} \in U$. Silloin $\boldsymbol{u}$ on muotoa

$$\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{u}_n,$$

jolloin

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{u}) &= T(k_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{u}_n) \\ &= k_1T(\boldsymbol{u}_1) + \cdots + k_nT(\boldsymbol{u}_n). \end{aligned}$$

□

Kuvausten yhdistäminen

Määritelmä 3.1.2. Olkoon $T_1 : U \to V$, $T_2 : V \to W$. Silloin yhdistetty kuvaus $T_2 \circ T_1$ on

$$T_2 \circ T_1 : U \to W, \quad (T_2 \circ T_1)(\boldsymbol{u}) = T_2(T_1(\boldsymbol{u})).$$

Lause 3.1.2. *Jos T_1 ja T_2 ovat lineaarikuvauksia, niin $T_2 \circ T_1$ on lineaarikuvaus.*

Todistus. Määritelmän 3.1.1 kohta (1) on harjoitustehtävä. Todistetaan kohta (2). Oletetaan tätä varten, että $\boldsymbol{u} \in U$ ja $k \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(k\boldsymbol{u}) &= T_2(T_1(k\boldsymbol{u})) \\ &= T_2(kT_1(\boldsymbol{u})) \\ &= kT_2(T_1(\boldsymbol{u})) \\ &= k(T_2 \circ T_1)(\boldsymbol{u}). \end{aligned}$$

□

Lause 3.1.3. *Olkoon $T : U \to U$ ja $I : U \to U$, missä $I(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$, kun $\boldsymbol{u} \in U$. Silloin*

$$T \circ I = I \circ T = T.$$

Todistus. Oletetaan, että $\boldsymbol{u} \in U$. Tällöin

$$(T \circ I)(\boldsymbol{u}) = T(I(\boldsymbol{u})) = T(\boldsymbol{u})$$

ja

$$(I \circ T)(\boldsymbol{u}) = I(T(\boldsymbol{u})) = T(\boldsymbol{u}).$$

□

Esimerkki 3.1.7. Olkoot $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ja $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sellaiset, että

$$T_1(x, y) = (x, -y)$$

ja

$$T_2(x, y) = (-x, y).$$

Silloin $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ja

$$(T_2 \circ T_1)(x, y) = T_2(T_1(x, y)) = T_2(x, -y) = (-x, -y).$$

3.2 Ydin ja kuva-avaruus

Määritelmä 3.2.1. Olkoon $T : U \to V$ lineaarikuvaus. Silloin kuvauksen T *ydin* on

$$\ker(T) = \{\boldsymbol{u} \in U \mid T(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_V\}$$

ja kuvauksen T *kuva-avaruus* on

$$\begin{aligned} \operatorname{ran}(T) &= \{T(\boldsymbol{u}) \mid \boldsymbol{u} \in U\} \\ &= \{\boldsymbol{v} \in V \mid \exists \boldsymbol{u} \in U : T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}\}. \end{aligned}$$

Huomautus. Määritelmästä 3.2.1 seuraa, että

$$\mathbf{0}_U \in \ker(T) \text{ ja } \mathbf{0}_V \in \operatorname{ran}(T).$$

Esimerkki 3.2.1. Olkoon

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, T(x, y) = x + y.$$

Silloin

$$\begin{aligned} \ker(T) &= \{(x, y) \mid T(x, y) = 0\} \\ &= \{(x, y) \mid x + y = 0\} \\ &= \{(x, y) \mid y = -x\} \\ &= \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

eli ydin on suora $y = -x$. Edelleen

$$\begin{aligned}\operatorname{ran}(T) &= \{T(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x+y \mid x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Esimerkki 3.2.2. Olkoon

$$T : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{n\times m}, T(A) = A^\mathsf{T}.$$

Silloin

$$\begin{aligned}\ker(T) &= \{A \in \mathbb{R}^{m\times n} \mid T(A) = \mathbf{0}\} \\ &= \{A \in \mathbb{R}^{m\times n} \mid A^\mathsf{T} = \mathbf{0}\} \\ &= \{\mathbf{0}\}.\end{aligned}$$

Edelleen $\operatorname{ran}(T) = \mathbb{R}^{n\times m}$ eli

$$\forall B \in \mathbb{R}^{n\times m} : \exists A \in \mathbb{R}^{m\times n} : T(A) = B.$$

Todistus. Valitaan mielivaltainen $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Olkoon $A = B^\mathsf{T}$, jolloin $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Silloin

$$T(A) = A^\mathsf{T} = (B^\mathsf{T})^\mathsf{T} = B.$$

□

Lause 3.2.1. *Olkoon $T : U \to V$ lineaarikuvaus. Silloin*

(a) $\ker(T)$ *on avaruuden U aliavaruus,*

(b) $\operatorname{ran}(T)$ *on avaruuden V aliavaruus.*

Todistus. Todistetaan kohta (a) soveltamalla aliavaruuskriteeriä (lause 1.2.1). Selvästi $\emptyset \neq \ker(T) \subseteq U$. Oletetaan sitten, että $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \in \ker(T)$ ja $k \in \mathbb{R}$. Nyt oletuksen nojalla

$$T(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0} \text{ ja } T(\boldsymbol{u}') = \mathbf{0},$$

joten

$$T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}') = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{u}') = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Siis $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}' \in \ker(T)$ eli kriteerin kohta (i) pätee. Edelleen

$$T(k\boldsymbol{u}) = kT(\boldsymbol{u}) = k\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

joten $k\boldsymbol{u} \in \ker(T)$ eli kriteerin kohta (ii) on voimassa.

Todistetaan sitten kohta (b) ja käytetään myös tähän aliavaruuskriteeriä. Selvästi $\emptyset \neq \operatorname{ran}(T) \subseteq V$. Oletetaan, että $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in \operatorname{ran}(T)$ ja $k \in \mathbb{R}$. Kohta (i) on harjoitustehtävä. Käydään läpi kohta (ii). Oletuksen mukaan on olemassa sellainen $\boldsymbol{u} \in U$, että

$$T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}.$$

Nyt
$$T(k\boldsymbol{u}) = kT(\boldsymbol{u}) = k\boldsymbol{v},$$
joten on olemassa sellainen $\boldsymbol{u}' = k\boldsymbol{u} \in U$, että
$$T(\boldsymbol{u}') = k\boldsymbol{v}.$$
Siis $k\boldsymbol{v} \in \mathrm{ran}(T)$ eli kriteerin kohta (ii) pätee. $\square$

Esimerkki 3.2.3. Olkoon
$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, T(X) = AX.$$
Silloin
$$\begin{aligned}\ker(T) &= \{X \in \mathbb{R}^n \mid T(X) = \mathbf{0}\}\\ &= \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = \mathbf{0}\}\end{aligned}$$
on homogeenisen lineaarisen yhtälöryhmän $AX = \mathbf{0}$ ratkaisuavaruus.

3.3 Dimensiolause

Määritelmä 3.3.1. Olkoon $T : U \to V$ lineaarikuvaus. Silloin

(1) kuvauksen T *nulliteetti* on $\dim(\ker(T))$,

(2) kuvauksen T *aste* on $\dim(\mathrm{ran}(T))$.

Huomautus. Määritellään, että
$$\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0.$$

Lause 3.3.1 (Dimensiolause)**.** *Olkoon $T : U \to V$ lineaarikuvaus ja $\dim(U) = n$. Silloin*
$$\dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{ran}(T)) = n$$
eli kuvauksen T nulliteettin ja asteen summa on n.

Todistus. Jos $n = 0$, niin $U = \{\mathbf{0}\}$. Tällöin
$$\ker(T) = \{\mathbf{0}\} \text{ ja } \mathrm{ran}(T) = \{\mathbf{0}\},$$
joten
$$\dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{ran}(T)) = 0 + 0 = 0 = n.$$
Oletetaan, että $n > 0$. Merkitään
$$\dim(\ker(T)) = r.$$

Olkoon $S = \{\boldsymbol{u}_1, \dots \boldsymbol{u}_r\}$ ytimen $\ker(T)$ kanta, jos $r > 0$, ja olkoon $S = \emptyset$, jos $r = 0$. Jos $r = n$, niin lauseen 1.6.2 nojalla

$$\ker(T) = U.$$

Tällöin

$$T(U) = T(\ker(T)) = \{\mathbf{0}\},$$

joten $\dim(\mathrm{ran}(T)) = 0$. Siis

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{ran}(T)) = n + 0 = n.$$

Oletetaan, että $r < n$. Nyt S on lineaarisesti riippumaton ja $S \subseteq U$. Lauseen 1.6.3 nojalla S voidaan täydentää avaruuden U kannaksi. Olkoon

$$S \cup \{\boldsymbol{u}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$$

avaruuden U kanta. Todistetaan määritelmän mukaisesti, että

$$S' = \{T(\boldsymbol{u}_{r+1}), \dots, T(\boldsymbol{u}_n)\}$$

on kuva-avaruuden $\mathrm{ran}(T)$ kanta.

Osoitetaan aluksi, että S' virittää kuva-avaruuden $\mathrm{ran}(T)$ ts. $\mathrm{ran}(T) = \mathrm{lin}(S')$. Oletetaan ensin, että $\boldsymbol{a} \in \mathrm{ran}(T)$. Siis on olemassa sellainen $\boldsymbol{u} \in U$, että $T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{a}$. Merkitään

$$\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \dots + c_n\boldsymbol{u}_n.$$

Nyt

$$\begin{aligned}
T(\boldsymbol{u}) &= T(c_1\boldsymbol{u}_1 + \dots + c_n\boldsymbol{u}_n)\\
\boldsymbol{a} &= c_1T(\boldsymbol{u}_1) + \dots + c_rT(\boldsymbol{u}_r) + c_{r+1}T(\boldsymbol{u}_{r+1}) + \dots + c_nT(\boldsymbol{u}_n)\\
\boldsymbol{a} &= \mathbf{0} + \dots + \mathbf{0} + c_{r+1}T(\boldsymbol{u}_{r+1}) + \dots + c_nT(\boldsymbol{u}_n)\\
\boldsymbol{a} &= c_{r+1}T(\boldsymbol{u}_{r+1}) + \dots + c_nT(\boldsymbol{u}_n),
\end{aligned}$$

joten $\boldsymbol{a} \in \mathrm{lin}(S')$. Siis $\mathrm{ran}(T) \subseteq \mathrm{lin}(S')$. Koska $S' \subseteq \mathrm{ran}(T)$ ja $\mathrm{ran}(T)$ on vektoriavaruus, niin $\mathrm{lin}(S') \subseteq \mathrm{ran}(T)$. Siis $\mathrm{ran}(T) = \mathrm{lin}(S')$ eli kohta (i) pätee.

Osoitetaan sitten, että S' on lineaarisesti riippumaton. Oletetaan, että

$$k_{r+1}T(\boldsymbol{u}_{r+1}) + \dots + k_nT(\boldsymbol{u}_n) = \mathbf{0}.$$

Koska T on lineaarikuvaus, niin

$$T(k_{r+1}\boldsymbol{u}_{r+1} + \dots + k_n\boldsymbol{u}_n) = \mathbf{0}.$$

Siis

$$k_{r+1}\boldsymbol{u}_{r+1} + \dots + k_n\boldsymbol{u}_n \in \ker(T),$$

jolloin se voidaan lausua ytimen kannan alkioiden lineaarikombinaationa. Saadaan

$$
\begin{aligned}
k_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + k_r\boldsymbol{u}_r &= k_{r+1}\boldsymbol{u}_{r+1} + \cdots + k_n\boldsymbol{u}_n \\
k_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + k_r\boldsymbol{u}_r - k_{r+1}\boldsymbol{u}_{r+1} - \cdots - k_n\boldsymbol{u}_n &= \mathbf{0} \\
k_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + k_r\boldsymbol{u}_r + (-k_{r+1})\boldsymbol{u}_{r+1} + \cdots + (-k_n)\boldsymbol{u}_n &= \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

Koska $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ on avaruuden U kanta, edellisestä yhtälöstä seuraa, että

$$k_1 = \cdots = k_r = -k_{r+1} = \cdots = -k_n = 0.$$

Tästä saadaan edelleen, että

$$k_{r+1} = \cdots = k_n = 0.$$

Täten S' on lineaarisesti riippumaton.

On siis osoitettu, että S' on kuva-avaruuden $\mathrm{ran}(T)$ kanta, joten

$$\dim(\mathrm{ran}(T)) = |S'| = n - r.$$

Lisäksi S on ytimen $\ker(T)$ kanta tai $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ ja $S = \emptyset$, joten

$$\dim(\ker(T)) = |S| = r.$$

Tällöin

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{ran}(T)) = r + n - r = n.$$

□

Esimerkki 3.3.1. Olkoon

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, T(x, y) = x + y.$$

Silloin

$$
\begin{aligned}
\ker(T) &= \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x(1, -1) \mid x \in \mathbb{R}\},
\end{aligned}
$$

joten

$$\dim(\ker(T)) = |\{(1, -1)\}| = 1.$$

Edelleen

$$\dim(\mathrm{ran}(T)) = \dim(\mathbb{R}) = 1$$

ja

$$\dim(U) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2.$$

Esimerkki 3.3.2. Olkoon

$$T : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{n\times m}, T(A) = A^{\mathsf{T}}.$$

Silloin

$$\dim(\ker(T)) = \dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$$

ja

$$\dim(\operatorname{ran}(T)) = \dim(\mathbb{R}^{n\times m}) = nm.$$

Esimerkki 3.3.3. Olkoon

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, T(X) = AX.$$

Silloin $\ker(T)$ on yhtälöryhmän $AX = \mathbf{0}$ ratkaisuavaruus ja

$$\dim(\ker(T)) = n - \dim(\operatorname{ran}(T)).$$

3.4 Vektoriavaruuksien isomorfia

Määritelmä 3.4.1. Olkoon $f : A \to B$ kuvaus. Silloin f on *injektio*, jos

$$f(a_1) = f(a_2) \;\Rightarrow\; a_1 = a_2.$$

Kuvaus f on *surjektio*, jos $f(A) = B$ eli

$$\forall b \in B : \exists a \in A : f(a) = b.$$

Jos f on injektio ja surjektio, niin f on *bijektio*.

Lause 3.4.1. *Olkoon $T : U \to V$ lineaarikuvaus. Silloin*

$$T \text{ injektio} \Leftrightarrow \ker(T) = \{\mathbf{0}\}.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että T on injektio. Olkoon $\boldsymbol{u} \in \ker(T)$. Silloin

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{u}) &= \mathbf{0} \\ T(\boldsymbol{u}) &= T(\mathbf{0}) \\ \boldsymbol{u} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Siis vain $\mathbf{0} \in \ker(T)$ eli $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Oletetaan sitten, että $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$. Olkoon

$$T(\boldsymbol{u}) = T(\boldsymbol{v}).$$

Silloin

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{u}) - T(\boldsymbol{v}) &= \mathbf{0} \\ T(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

joten $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in \ker(T)$. Siis

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{v}, \end{aligned}$$

joten T on injektio. □

Esimerkki 3.4.1. Olkoon

$$T : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{n\times m}, T(A) = A^{\mathsf{T}}.$$

Onko T injektio?

Ratkaisu 1. Koska $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$, niin T on injektio.

Ratkaisu 2. Olkoon

$$T(A) = T(B).$$

Silloin

$$\begin{aligned} A^{\mathsf{T}} &= B^{\mathsf{T}} \\ (A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} &= (B^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} \\ A &= B, \end{aligned}$$

joten T on injektio.

Lause 3.4.2. *Olkoon $T : U \to V$ lineaarikuvaus ja $\dim(V) = n$. Silloin*

$$T \textit{ surjektio} \Leftrightarrow \dim(\operatorname{ran}(T)) = n.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että T on surjektio. Tällöin $\operatorname{ran}(T) = V$, joten

$$\dim(\operatorname{ran}(T)) = \dim(V) = n.$$

Oletetaan sitten, että $\dim(\operatorname{ran}(T)) = n$. Tällöin kuva-avaruudella $\operatorname{ran}(T)$ on sellainen kanta S, että $|S| = n$. Koska $S \subseteq V$, S on lineaarisesti riippumaton ja $|S| = \dim(V)$, niin S on avaruuden V kanta. Siis $\operatorname{ran}(T) = \operatorname{lin}(S) = V$, joten T on surjektio. □

Lause 3.4.3. *Olkoon $T : U \to V$ lineaarikuvaus ja $\dim(U) = \dim(V) = n$. Silloin*

$$T \textit{ surjektio} \Leftrightarrow T \textit{ injektio}.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että T on surjektio. Tällöin

$$\dim(\operatorname{ran}(T)) = \dim(V) = n,$$

joten

$$\dim(\ker(T)) = \dim(U) - \dim(\operatorname{ran}(T)) = n - n = 0.$$

Siis $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$, joten T on injektio.

Toinen suunta on harjoitustehtävä. □

Määritelmä 3.4.2. Vektoriavaruudet U ja V ovat *isomorfiset*, jos on olemassa $T : U \to V$, joka on bijektio ja lineaarikuvaus. Merkitään

$$U \simeq V.$$

Kuvausta T kutsutaan *isomorfismiksi.*

Huomautus. Isomorfismissa alkioilla on 1–1–vastaavuus ja laskutoimitukset säilyvät.

Esimerkki 3.4.2. Kuvaus

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2\times 2}, T(a,b,c,d) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

on isomorfismi, joten

$$\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Kuvaus

$$T : \mathbb{R}^3 \to P_2, T(a,b,c) = a + bx + cx^2,$$

on isomorfismi, joten

$$\mathbb{R}^3 \simeq P_2.$$

Kuvaus

$$T : \mathbb{R}^2 \to \operatorname{lin}\{e^x, e^{2x}\}, T(a,b) = ae^x + be^{2x},$$

on isomorfismi, joten

$$\mathbb{R}^2 \simeq \operatorname{lin}\{e^x, e^{2x}\}.$$

Esimerkki 3.4.3. Olkoon $\det A \neq 0$. Silloin kuvaus

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, T(X) = AX,$$

on isomorfismi.

Todistus. Aiemmin ollaan jo todistettu, että T on lineaarikuvaus. Osoitetaan ensin, että T on injektio. Olkoon

$$T(X) = T(Y).$$

Silloin

$$\begin{aligned} AX &= AY \\ A^{-1}(AX) &= A^{-1}(AY) \\ (A^{-1}A)X &= (A^{-1}A)Y \\ IX &= IY \\ X &= Y, \end{aligned}$$

joten T on injektio. Osoitetaan sitten, että T on surjektio. Valitaan mielivaltainen $Y \in \mathbb{R}^n$. Olkoon $X = A^{-1}Y$. Silloin

$$T(X) = AX = A(A^{-1}Y) = (AA^{-1})Y = IY = Y,$$

joten T on surjektio. □

Huomautus. Lauseen 3.4.3 perusteella yllä riittäisi todistaa joko injektiivisyys tai surjektiivisuus.

Lause 3.4.4. *Olkoot U ja V äärellisulotteisia vektoriavaruuksia. Silloin*

$$U \simeq V \Leftrightarrow \dim(U) = \dim(V).$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $U \simeq V$. Tällöin on olemassa isomorfismi $T : U \to V$. Kuvaus T on injektio, joten $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$. Siis $\dim(\ker(T)) = 0$, jolloin

$$\dim(\operatorname{ran}(T)) = \dim(U) - 0 = \dim(U).$$

Toisaalta T on surjektio, joten $\operatorname{ran}(T) = V$. Siis $\dim(\operatorname{ran}(T)) = \dim(V)$, jolloin saadaan, että

$$\dim(U) = \dim(V).$$

Oletetaan sitten, että $\dim(U) = \dim(V) = n$. Olkoon $S = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ avaruuden U kanta ja $S' = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ avaruuden V kanta. Silloin sääntö

$$T(\boldsymbol{u}) = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n, \text{ kun } \boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n,$$

määrittelee isomorfismin avaruudelta U avaruudelle V (harjoitustehtävä). Siis

$$U \simeq V.$$

□

Esimerkki 3.4.4. Voidaan todistaa, että

$$\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{R}^{2\times 2} \simeq P_3 \simeq \mathbb{R}^{4\times 1}$$

ja

$$\mathbb{R}^2 \simeq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$$

sekä

$$\mathbb{R} \simeq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \simeq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}.$$

Huomautus. Isomorfisuus $\simeq$ on ekvivalenssirelaatio.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

3.5 Lineaarikuvaukset $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Olkoon A $m \times n$–matriisi. Silloin

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, T(X) = AX,$$

on lineaarikuvaus, ns. *matriisikuvaus.*

Tässä luvussa todistetaan, että jokainen lineaarikuvaus $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on matriisikuvaus ja että jokaisen kuvauksen matriisi on yksikäsitteinen.

Lause 3.5.1. *Olkoon $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineaarikuvaus. Silloin*

$$T(X) = AX,$$

missä

$$A = \left[T(\boldsymbol{e}_1) \mid T(\boldsymbol{e}_2) \mid \dots \mid T(\boldsymbol{e}_n) \right]$$

ja $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollinen kanta. Matriisia A sanotaan kuvauksen T matriisiksi *tai* luonnolliseksi matriisiksi.

Todistus. Merkitään

$$T(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, T(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, T(\boldsymbol{e}_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Siis

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Todistetaan, että $T(X) = AX$, kun $X \in \mathbb{R}^n$. Olkoot vektorin X koordinaatit $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Silloin

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n.$$

Silloin

$$T(X) = T(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1T(\boldsymbol{e}_1) + x_2T(\boldsymbol{e}_2) + \dots + x_nT(\boldsymbol{e}_n)$$

ja

$$\begin{aligned} AX &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \\ &= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= x_1T(\boldsymbol{e}_1) + x_2T(\boldsymbol{e}_2) + \dots + x_nT(\boldsymbol{e}_n), \end{aligned}$$

joten $T(X) = AX$. $\square$

Lause 3.5.2. *Olkoon*

$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, T_A(X) = AX,$$

ja

$$T_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, T_B(X) = BX.$$

Silloin

$$T_A = T_B \Leftrightarrow A = B.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $A = B$. Tällöin

$$AX = BX,$$

kun $X \in \mathbb{R}^n$. Siis

$$T_A(X) = T_B(X),$$

kun $X \in \mathbb{R}^n$, joten $T_A = T_B$.

Toinen suunta on harjoitustehtävä. □

Esimerkki 3.5.1. Olkoon

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T(X) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Kirjoita T muodossa

$$T(X) = AX,$$

ts. etsi kuvauksen T luonnollinen matriisi.

Ratkaisu. Matriisi A on

$$\begin{aligned} A &= \left[T(\boldsymbol{e}_1) \;\vdots\; T(\boldsymbol{e}_2) \;\vdots\; T(\boldsymbol{e}_3) \right] \\ &= \left[T(\boldsymbol{i}) \;\vdots\; T(\boldsymbol{j}) \;\vdots\; T(\boldsymbol{k}) \right] \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Esimerkki 3.5.2. Olkoon

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, T(X) = X.$$

Silloin

$$T(X) = IX.$$

Esimerkki 3.5.3. Olkoon

$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, T(X) = AX$$

ja

$$T_B : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n, T(X) = BX.$$

Silloin

$$\begin{aligned}(T_A \circ T_B)(X) &= T_A(T_B(X)) \\ &= T_A(BX) \\ &= A(BX) \\ &= (AB)X.\end{aligned}$$

Siis kuvauksen $T_A \circ T_B$ luonnollinen matriisi on tulo AB.

Huomautus. Matriisien kertolaskun tavoin kuvausten yhdistäminen ei ole kommutatiivinen eli yleisesti

$$T_A \circ T_B \neq T_B \circ T_A.$$

Esimerkki 3.5.4. Olkoon

$$T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix}.$$

Silloin

$$T_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Geometrisesti tämä tarkoittaa laajennusta x–akselin suunnassa.

Esimerkki 3.5.5. Olkoon

$$T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ y \end{bmatrix}.$$

Silloin

$$T_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Geometrisesti tämä tarkoittaa viistoutusta x–akselin suunnassa.

Esimerkki 3.5.6. Olkoot T_1 ja T_2 kuten edellisissä kahdessa esimerkissä. Koska

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

niin

$$(T_2 \circ T_1)\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ y \end{bmatrix}$$

ja

$$(T_1 \circ T_2)\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+2y \\ y \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 3.5.7. Matriisi

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

välittää kierron kulman θ verran.

Esimerkki 3.5.8. Olkoon

$$T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T_3\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

Silloin

$$T_3\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Geometrisesti tämä tarkoittaa peilausta y–akselin suhteen.

Esimerkki 3.5.9. Olkoon

$$T_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T_4\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Silloin

$$T_4\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Geometrisesti tämä tarkoittaa peilausta suoran $y = x$ suhteen.

Esimerkki 3.5.10. Olkoot T_1 ja T_4 kuten aiemmissa esimerkeissä. Koska

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ja

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

niin

$$(T_4 \circ T_1)\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 2x \end{bmatrix}$$

ja

$$(T_1 \circ T_4)\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y \\ x \end{bmatrix}.$$

3.6 Lineaarikuvauksen matriisi kantojen suhteen

Lause 3.6.1. *Olkoon $T : U \to V$ lineaarikuvaus. Olkoon $S = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ avaruuden U kanta ja $S' = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m\}$ avaruuden V kanta. Silloin*

$$(T(\boldsymbol{u}))_{S'} = [T]_{S,S'} (\boldsymbol{u})_S,$$

missä

$$[T]_{S,S'} = \left[(T(\boldsymbol{u}_1))_{S'} \;\vdots\; (T(\boldsymbol{u}_2))_{S'} \;\vdots\; \dots \;\vdots\; (T(\boldsymbol{u}_n))_{S'} \right].$$

Todistus. Vrt. lauseen 3.5.1 todistus. □

Määritelmä 3.6.1. Matriisi $[T]_{S,S'}$ on *kuvauksen T matriisi kantojen S ja S' suhteen.*

Esimerkki 3.6.1. Olkoon

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, T(X) = AX.$$

Olkoon S avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollinen kanta ja S' avaruuden $\mathbb{R}^m$ luonnollinen kanta. Silloin

$$[T]_{S,S'} = A.$$

Ts. kuvauksen matriisi luonnollisten kantojen suhteen on kuvauksen luonnollinen matriisi.

Esimerkki 3.6.2. Olkoon

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T(X) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Olkoon $S = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ ja $S' = \{(1,0), (1,1)\}$. Silloin S on avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta ja S' on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta. Mikä on $[T]_{S,S'}$?

Matriisi $[T]_{S,S'}$ on

$$\left[(T(\boldsymbol{u}_1))_{S'} \;\vdots\; (T(\boldsymbol{u}_2))_{S'} \;\vdots\; (T(\boldsymbol{u}_3))_{S'} \right].$$

Nyt

$$T(\boldsymbol{u}_1) = T(1,0,0) = (2,0) = 2(1,0) + 0(1,1),$$

joten

$$(T(\boldsymbol{u}_1))_{S'} = (2,0),$$

ja

$$T(\boldsymbol{u}_2) = T(1,1,0) = (3,0) = 3(1,0) + 0(1,1),$$

joten

$$(T(\boldsymbol{u}_2))_{S'} = (3,0),$$

ja

$$T(\boldsymbol{u}_3) = T(1,1,1) = (3,1) = 2(1,0) + 1(1,1),$$

joten

$$(T(\boldsymbol{u}_3))_{S'} = (2,1).$$

Siis

$$[T]_{S,S'} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Olkoon $X = (2,1,1)$. Silloin

$$X = 1(1,0,0) + 0(1,1,0) + 1(1,1,1),$$

joten

$$(X)_S = (1,0,1).$$

Nyt

$$\begin{aligned} (T(X))_{S'} &= [T]_{S,S'}\,(X)_S \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Toisaalta

$$T(X) = (5,1) = 4(1,0) + 1(1,1),$$

jolloin

$$(T(X))_{S'} = (4,1).$$

Merkintä. Kun $S = S'$, merkitään

$$[T]_{S,S} = [T]_S\,.$$

Esimerkki 3.6.3. Olkoon

$$T : U \to U, T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}.$$

Olkoon $\dim(U) = n$ ja S avaruuden U kanta. Silloin

$$(T(\boldsymbol{u}))_S = [T]_S\,(\boldsymbol{u})_S.$$

Siis

$$[T]_S = I$$

Kannan vaihto

Olkoon $T : U \to U$ lineaarikuvaus, ja olkoot S ja S' äärellisulotteisen avaruuden U kaksi kantaa. Silloin

$$(T(\boldsymbol{u}))_S = [T]_S \, (\boldsymbol{u})_S$$

ja

$$(T(\boldsymbol{u}))_{S'} = [T]_{S'} \, (\boldsymbol{u})_{S'}.$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{u})_S &= (\boldsymbol{u})_{S'} \\ P(T(\boldsymbol{u}))_S &= (T(\boldsymbol{u}))_{S'}, \end{aligned}$$

missä P on kannanmuunnosmatriisi kannalta S kannalle S'. Siis

$$\begin{aligned} P(T(\boldsymbol{u}))_S &= [T]_{S'} \, P \, (\boldsymbol{u})_S \\ (T(\boldsymbol{u}))_S &= P^{-1}([T]_{S'} \, P \, (\boldsymbol{u})_S) \\ (T(\boldsymbol{u}))_S &= (P^{-1} \, [T]_{S'} \, P)(\boldsymbol{u})_S. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$[T]_S = P^{-1} \, [T]_{S'} \, P.$$

Määritelmä 3.6.2. Olkoot A ja B $n \times n$–matriiseja. Silloin A on *similaarinen matriisin B kanssa*, jos on olemassa sellainen kääntyvä matriisi P, että

$$A = P^{-1} B P.$$

Tällöin merkitään $A \sim B$.

Lause 3.6.2. *Similaarisuus on ekvivalenssirelaatio.*

Todistus. Tiedetään, että $A = I^{-1} A I$, joten $A \sim A$ eli similaarisuus on refleksiivinen relaatio.

Oletetaan, että $A \sim B$. Tällöin $A = P^{-1} B P$, jolloin $B = (P^{-1})^{-1} A P^{-1}$. Siis $B \sim A$. Täten similaarisuus on symmetrinen relaatio.

Transitiivisuuden osoittaminen on harjoitustehtävä. □

Huomautus. Symmetrisyyden vuoksi voidaan sanoa, että A ja B ovat similaariset.

Huomautus. Huomataan, että

$$[T]_S \sim [T]_{S'} .$$

3.7 Ominaisarvot ja ominaisvektorit

Määritelmä 3.7.1. Olkoon A $n \times n$–matriisi. Silloin $\lambda \in \mathbb{R}$ on matriisin A *ominaisarvo*, jos

$$\exists X \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} : AX = \lambda X.$$

Vektoria X sanotaan ominaisarvoa λ vastaavaksi *ominaisvektoriksi.*

Huomautus. Jos $X = \mathbf{0}$, niin on aina voimassa $AX = \lambda X$.

Huomautus. Kutakin ominaisarvoa vastaa useita ominaisvektoreita.

Huomautus. Jos jokin ominaisvektori vastaa kahta kahta ominaisarvoa eli

$$AX = \lambda_1 X \text{ ja } AX = \lambda_2 X,$$

niin nämä ominaisarvot ovat samat eli

$$\lambda_1 = \lambda_2.$$

Esimerkki 3.7.1. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}.$$

Silloin

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Siis luku 3 on yksi matriisin A ominaisarvo ja vektori $(1, 2)$ yksi tätä ominaisarvoa vastaava ominaisvektori.

Lause 3.7.1. *Olkoon A $n \times n$–matriisi. Silloin $\lambda \in \mathbb{R}$ on matriisin A ominaisarvo, jos ja vain jos*

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

eli

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

Todistus. Nyt λ on matriisin A ominaisarvo, jos ja vain jos

$$\begin{aligned} &\exists X \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} : AX = \lambda X \\ \Leftrightarrow &\exists X \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} : AX = \lambda I X \\ \Leftrightarrow &\exists X \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} : AX - \lambda I X = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow &\exists X \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} : (A - \lambda I)X = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Kurssilla Lineaarialgebra 1A on todettu, että yhtälöryhmällä $BX = \mathbf{0}$ on epätriviaali ratkaisu $X \neq \mathbf{0}$, jos ja vain jos $\det B = 0$. Asettamalla $B = A - \lambda I$ saadaan, että

$$\begin{aligned} &\exists X \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} : (A - \lambda I)X = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow &\det(A - \lambda I) = 0. \end{aligned}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= 0 \\
\det(-1(\lambda I - A)) &= 0 \\
(-1)^n \det(\lambda I - A) &= 0 \\
\det(\lambda I - A) &= 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Määritelmä 3.7.2. Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Silloin

$$\det(\lambda I - A)$$

on matriisin A *karakteristinen polynomi*. Yhtälö

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

on matriisin A *karakteristinen yhtälö*.

Huomautus. Karakteristinen polynomi $\det(\lambda I - A)$ on n. asteen polynomi, joten sillä on korkeintaan n reaalista juurta. Siis matriisilla A on korkeintaan n ominaisarvoa.

Huomautus. Kompleksijuuria ei käsitellä tällä kurssilla.

Huomautus. Olkoon $n = 2$. Silloin

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21}.
\end{aligned}$$

Esimerkki 3.7.2. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Silloin

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - 3)\lambda + 2 \\
&= \lambda^2 - 3\lambda + 2.
\end{aligned}$$

Nyt karakteristinen yhtälö on

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

josta saadaan $\lambda = 1$ tai $\lambda = 2$.

Esimerkki 3.7.3. Olkoon $A = I_2$. Silloin

$$\det(\lambda I_2 - I_2) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2,$$

joten matriisin I_2 ainoa ominaisarvo on 1.

Esimerkki 3.7.4. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Silloin

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 2)(\lambda - 2) + 5 \\ &= \lambda^2 - 4 + 5 \\ &= \lambda^2 + 1. \end{aligned}$$

Karakteristisella polynomilla ei ole reaalijuuria, joten matriisilla ei ole yhtään ominaisarvoa.

Esimerkki 3.7.5. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Silloin

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda - 2 & -2 \\ -3 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -2 & \lambda - 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda - 2) + 2(-2\lambda - 4) - 3(3\lambda - 2) = \lambda^3 - 4\lambda^2 - 12\lambda \\ &= \lambda(\lambda^2 - 4\lambda - 12). \end{aligned}$$

Matriisin A ominaisarvot ovat siis 0, 6 ja -2.

Lause 3.7.2. *Jos A on kolmiomatriisi, niin ominaisarvot ovat $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ eli diagonaalialkiot.*

Todistus. Olkoon A kolmiomatriisi. Merkitään $\lambda I - A = B$. Nyt $b_{ij} = -a_{ij}$, kun $i \neq j$, joten B on kolmiomatriisi. Koska $b_{ii} = \lambda - a_{ii}$, kun $i \in \{1, \ldots, n\}$, niin

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det B \\ &= b_{11} b_{22} \cdots b_{nn} \\ &= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn}). \end{aligned}$$

Tästä saadaan ratkaistua $\lambda = a_{11}$, $\lambda = a_{22}$, $\ldots$, $\lambda = a_{nn}$. $\square$

Lause 3.7.3. *Similaarisilla matriiseilla on samat ominaisarvot.*

Todistus. Todistetaan lause osoittamalla, että similaarisilla matriiseilla on sama karakteristinen polynomi. Olkoon $A \sim B$. Silloin

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= \det(\lambda I - P^{-1}BP) \\
&= \det(\lambda P^{-1}P - P^{-1}BP) \\
&= \det(P^{-1}(\lambda P) - P^{-1}(BP)) \\
&= \det(P^{-1}(\lambda P - BP)) \\
&= \det(P^{-1})\det(\lambda P - BP) \\
&= \det(P^{-1})\det(\lambda IP - BP) \\
&= \det(P^{-1})\det((\lambda I - B)P) \\
&= \det(P^{-1})\det(\lambda I - B)\det P \\
&= \frac{1}{\det P}\det(\lambda I - B)\det P \\
&= \det(\lambda I - B).
\end{aligned}$$

□

Lause 3.7.4. *Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ sen jokin ominaisarvo. Merkitään*

$$E_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n \mid X \text{ on ominaisarvoa } \lambda \text{ vastaava ominaisvektori }\} \cup \{\mathbf{0}\}.$$

Silloin E_λ on homogeenisen yhtälöryhmän

$$AX = \lambda X$$

eli

$$(\lambda I - A)X = \mathbf{0}$$

ratkaisuavaruus.

Todistus. Seuraa suoraan määritelmistä ja esimerkistä 1.2.6. □

Määritelmä 3.7.3. Joukko E_λ on ominaisarvon λ *ominaisavaruus.*

Huomautus. Ominaisavaruus E_λ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus.

Esimerkki 3.7.6. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tämän matriisin ominaisarvoiksi saatiin aiemmin $\lambda = 1$ ja $\lambda = 2$. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$AX = 1X$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

eli

$$\begin{cases} 3x + 2y = x \\ -x \qquad\quad = y. \end{cases}$$

Ratkaisuksi saadaan

$$y = -x,$$

joten

$$\begin{aligned} E_\lambda &= E_1 \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\} \\ &= \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, -1) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{lin}\{(1, -1)\}. \end{aligned}$$

Ratkaistaan sitten yhtälöryhmä

$$AX = 2X$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

eli

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2x \\ -x \qquad\quad = 2y. \end{cases}$$

Ratkaisuksi saadaan

$$x = -2y,$$

joten

$$\begin{aligned} E_\lambda &= E_2 \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -2y\} \\ &= \{(-2y, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-2, 1) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{lin}\{(-2, 1)\}. \end{aligned}$$

Esimerkki 3.7.7. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matriisi A on kolmiomatriisi, joten sen ominaisarvot saadaan diagonaalilta. Siis sen ainoa ominaisarvo on $\lambda = 2$. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$AX = 2X$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

eli

$$\begin{cases} 2x + \ \ y \qquad\quad = 2x \\ \qquad 2y \qquad\quad = 2y \\ \qquad\qquad\quad 2z = 2z. \end{cases}$$

Ratkaisuksi saadaan

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0\ , \quad t, s \in \mathbb{R}, \\ z = s \end{cases}$$

joten

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Siis

$$E_\lambda = E_2 = \operatorname{lin}\{(1,0,0),(0,0,1)\}.$$

Lause 3.7.5. *Olkoot* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *matriisin* A *erisuuret ominaisarvot ja* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ *jotkin niitä vastaavat ominaisvektorit. Silloin* $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ *on lineaarisesti riippumaton.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ on lineaarisesti riippuva. Koska $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{0}$, niin $\{\boldsymbol{v}_1\}$ on lineaarisesti riippumaton. Olkoon r suurin sellainen kokonaisluku, että

$$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$$

on lineaarisesti riippumaton. Vastaoletuksen nojalla

$$1 \leq r < m$$

ja

$$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}\}$$

on lineaarisesti riippuva. Siis on olemassa sellaiset $k_1, \ldots, k_{r+1}$, että

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1} = \boldsymbol{0}$$

ja ainakin yksi $k_i \neq 0$. Nyt

$$\begin{aligned} A(k_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1}) &= A\boldsymbol{0} \\ k_1A\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_{r+1}A\boldsymbol{v}_{r+1} &= \boldsymbol{0} \\ k_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_{r+1}\lambda_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1} &= \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} \lambda_{r+1}(k_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1}) &= \lambda_{r+1}\boldsymbol{0} \\ k_1\lambda_{r+1}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_{r+1}\lambda_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1} &= \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Vähentämällä edelliset yhtälöt puolittain saadaan

$$
\begin{aligned}
k_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_{r+1}\lambda_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1} - (k_1\lambda_{r+1}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_{r+1}\lambda_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1}) &= \mathbf{0} - \mathbf{0} \\
k_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})\boldsymbol{v}_r + k_{r+1}(\lambda_{r+1} - \lambda_{r+1})\boldsymbol{v}_{r+1} &= \mathbf{0} \\
k_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})\boldsymbol{v}_1 + \cdots + k_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})\boldsymbol{v}_r &= \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

Koska $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ on lineaarisesti riippumaton,

$$k_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = \cdots = k_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0,$$

josta seuraa

$$k_1 = \cdots = k_r = 0.$$

Siis on oltava

$$k_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1} = \mathbf{0},$$

joten $k_{r+1} = 0$. Tämä on ristiriita, sillä ainakin jokin $k_i \neq 0$. $\square$