

## Differentiaaliyhtälöt 2018, harjoitus 7, viikolla 18

1. Ratkaise diff.yhtälö

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0, \quad x > 0,$$

muunnoksella  $x = e^t$  ja  $y(x) = z(t)$ . Laske ensin funktioiden  $y$  ja  $z$  derivaattojen yhteydet ketjusäännön avulla.

2. Ratkaise diff.yhtälö

$$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0, \quad x > 0,$$

Frobeniuksen menetelmällä. (Kummastakin sarjasta riittää kolme termiä.)

3. Ratkaise diff.yhtälöryhmä

$$\begin{aligned}y_1' &= 2y_1 - y_2, \\y_2' &= -y_1 + 2y_2\end{aligned}$$

eliminointimenetelmällä.

4. Ratkaise edellisen tehtävän diff.yhtälöryhmä matriisimenetelmällä etsimällä kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua.

5. Ratkaise diff.yhtälöryhmä

$$Y' = AY,$$

missä

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

matriisimenetelmällä etsimällä kolme lineaarisesti riippumatonta ratkaisua.

6. Olkoon  $\lambda$  matriisin  $A$  ominaisarvo ja  $X$  sitä vastaava ominaisvektori. Todista, että vektorifunktio  $Xe^{\lambda x}$  toteuttaa diff.yhtälöryhmän  $Y' = AY$ .

7. Olkoot  $y_1(t)$  ja  $y_2(t)$  kahden kilpailevan eliölajin määrät hetkellä  $t$ . Niiden kasvunopeuksia kuvaa diff.yhtälöryhmä

$$\begin{aligned}y_1'(t) &= 2y_1(t) - y_2(t), \\y_2'(t) &= -y_1(t) + 2y_2(t).\end{aligned}$$

Lajimäärät alussa ovat  $y_1(0) = 100$  ja  $y_2(0) = 200$ . Määritä  $y_1(t)$  ja  $y_2(t)$ . Häviääkö jompikumpi laji sukupuuttoon? Jos häviää, niin minkä ajan kuluttua?