

Differentiaaliyhtälöt 2018, harjoitus 4, viikolla 15

1. Ratkaise diff.yhtälö

$$xy'' - 2y' = x^2$$

palauttamalla se kahdeksi 1. kertaluokan diff.yhtälöksi.

2. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y''y = (y')^2, y(1) = 1, y'(1) = 2,$$

sijoituksella $y' = z(y)$.

3. a) Etsittävä alkuarvotehtävälle

$$y' = 5y^{4/5}, y(0) = 0,$$

kaksi ratkaisua. Vihje: Etsi triviaalin ratkaisun lisäksi ratkaisua muodossa $y = x^r$.

b) Mitä voidaan päätellä funktion $f(x, y) = 5y^{4/5}$ L-jatkuvuudesta?

4. Olkoon $D = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$ ja $f(x, y) = xy^4$.

a) Todista määritelmään perustuen, että funktio f on L-jatkuva muuttujan y suhteen suorakulmiossa D .

b) Päättele sama lauseen 2.8.1 avulla.

5. Todista L-jatkuvuuden määritelmään perustuen, että funktio $f(x, y) = x^3\sqrt{y}$ ei ole L-jatkuva muuttujan y suhteen suorakulmiossa $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

6. Tarkastellaan separoituvaa diff.yhtälöä

$$y' = g(x)h(y),$$

missä $g(x)$ on jatkuva funktio ja $h(y)$ on jatkuvasti derivoituva funktio. Todista, että yhtälö täyttää olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen 2.8.2 L-jatkuvuusehdon.

Vihje: Käytä lausetta 2.8.1.

7. a) Määritä ellipsiparven

$$\frac{x^2}{(2C)^2} + \frac{y^2}{C^2} = 1$$

diff.yhtälö.

b) Määritä ko. ellipsiparven kohtisuorat leikkaajat.