

Differentiaaliyhtälöt 2018, harjoitus 3, viikolla 13

1. Ratkaise diff.yhtälö

$$y' + xy = x.$$

2. Ratkaise diff.yhtälö

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}y^3.$$

3. a) Todista, että diff.yhtälö

$$2xy + (3x^2 - y^2 - 3)y' = 0$$

ei ole eksakti.

b) Muokkaa se eksaktiksi sopivalla integroivalla tekijällä.

4. a) Tutkittava, milloin lineaarinen diff.yhtälö

$$y' + a(x)y = 0$$

on eksakti.

b) Kun se ei ole eksakti, muokkaa se eksaktiksi sopivalla integroivalla tekijällä.

5. Olkoon

$$L : C^{(1)}(I) \rightarrow C(I), Ly = y' + 2y.$$

a) Todista, että L on lineaarikuvaus.

(Derivaatan ominaisuuksia ei tarvitse käydä läpi analyttisesti.)

b) Määritä kuvauksen L ydin $\ker L$.

c) Etsi ytimelle kanta ja määritä ytimen dimensio.

6. a) Todista, että lineaarisen diff.yhtälön

$$y' + a(x)y = b(x)$$

yleinen ratkaisu voidaan esittää muodossa $y = y_p + y_h$, jossa y_p on koko yhtälön jokin yksittäisratkaisu ja y_h käy läpi homogeenisen yhtälön $y' + a(x)y = 0$ kaikki ratkaisut.

b) Kirjoita tehtävän 1 ratkaisu muodossa $y = y_p + y_h$.

7. Tarkastellaan tietyn teknisen innovaation käyttöönottoa yrityksissä. Olkoon (potentiaalisten) yritysten lkm R (> 0), ja olkoon innovaatiota käyttävien yritysten lkm $N(t)$. Oletetaan, että $N(t)$ noudattaa matemaattista mallia

$$dN/dt = kRN - kN^2, \quad N(0) = N_0 > 0,$$

jossa $k > 0$. Määritä $N(t)$ ja $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$.