

Differentiaaliyhtälöt 2018, harjoitus 1, viikolla 11

1. Millä vakion $m \in \mathbf{R}$ arvoilla funktio $y = e^{mx}$ on diff.yhtälön

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$

b) $y'' - y = 0$

c) $y'' + y' + y = 0$

ratkaisu.

2. Tutki, millä vakioiden C_1 ja C_2 arvoilla funktio

$$y = \begin{cases} C_1 x^2, & \text{kun } x \leq 0, \\ C_2 x^2, & \text{kun } x > 0, \end{cases}$$

toteuttaa ko. alkuarvotehtävän

$$y'x = 2y, \quad y(-1) = 1, \quad x \in \mathbf{R}.$$

3. a) Osoita, että funktiot $y = e^{-x}$ ja $y = e^{2x}$ toteuttavat lineaarisen diff.yhtälön $y'' - y' - 2y = 0$ ja epälineaarisen diff.yhtälön $y''y - (y')^2 = 0$.

b) Tutki, toteuttaako funktio $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$ a-kohdan lineaarisen diff.yhtälön.

c) Tutki, toteuttaako funktio $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$ a-kohdan epälineaarisen diff.yhtälön.

4. a) Määritä asteroidiparven $x^{2/3} + y^{2/3} = C^{2/3}$ diff.yhtälö.

Hahmottele käyräparven muotoa. (Voit käyttää nettiä.)

b) Määritä lemniskaattaparven $(x^2 + y^2)^2 = 2C^2(x^2 - y^2)$ diff.yhtälö.

Hahmottele käyräparven muotoa. (Voit käyttää nettiä.)

5. Mikä virhe on seuraavassa päättelyssä? Osittaisintegroinnilla saadaan

$$\int \frac{1}{x} dx = \int x \frac{1}{x^2} dx = -1 + \int \frac{1}{x} dx.$$

Siis $0 = -1$.

6. Investoidun rahamäärän sanotaan tuottavan korkoa korolle jatkuvasti, jos rahamäärän kasvu on verrannollista sen hetkiseen rahamäärään. Oletetaan, että korkokanta (= verrannollisuuskerroin) on r % ja investoitu rahamäärä y_0 euroa. Minkä alkuarvotehtävän rahamäärä y toteuttaa?

7. Muodosta diff.yhtälö sellaiselle xy -tason x -akselin yläpuolella sijaitsevalle käyräparvelle, jonka käyrät toteuttavat seuraavan ehdon:

Käyrän jokaisen tangenttisuoran, vastaavan normaalisuoran ja x -akselin muodostaman kolmion pinta-ala on yhtäsuuri kuin tangenttisuoran kulmakerroin.

(Diff.yhtälöä ei tarvitse ratkaista.)

Huom. Harjoitusryhmä valitaan kurssin kotisivuilla

<https://coursepages.uta.fi/mttma6/>