TAMPEREEN YLIOPISTO

Informaatiotieteiden yksikkö

Differentiaaliyhtälöt

Pentti Haukkanen

Sisältö

Luku 1

Differentiaaliyhtälön käsite

Määritelmä 1.1. *Differentiaaliyhtälöllä* tarkoitetaan yhtälöä, joka koostuu reaalimuuttujasta x, x:n reaaliarvoisesta tuntemattomasta funktiosta y ja y:n derivaatoista $y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Diff.yhtälön yleinen muoto on siis

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Diff.yhtälön *kertaluku* on funktion y korkeimman derivaatan kertaluku.

Esimerkki 1.1. Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ F(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3$, määräämä differentiaaliyhtälö on

$$x + y' = 0. \tag{1.1}$$

Yhtälön kertaluku on 1.

Huomautus 1.1. Differentiaaliyhtälö annetaan yleensä suoraan muodossa (1.1) eikä funktion F välityksellä.

Määritelmä 1.2. Diff.yhtälöä sanotaan *n. kertaluvun lineaariseksi* diff.yhtälöksi, jos se voidaan kirjoittaa muodossa

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x).$$

Funktioita $a_n(x), \ldots, a_0(x)$ sanotaan yhtälön *kertoimiksi*. Jos funktio b on $\equiv 0$, niin yhtälöä sanotaan *homogeeniseksi*.

Esimerkki 1.2. Yhtälö (1.1) on lineaarinen. Sen sijaan yhtälö

$$x + (y')^2 = 0$$

ei ole.

Määritelmä 1.3. *Osittaisdifferentiaaliyhtälöllä* tarkoitetaan yhtälöä, joka koostuu useasta muuttujasta, näiden tuntemattomasta funktiosta ja funktion osittaisderivaatoista.

Huomautus 1.2. Tällä kurssilla tarkastellaan vain ns. *tavallisia diff.yhtälöitä*, ts. yhtälöitä, joissa on vain yksi muuttuja.

Määritelmä 1.4. Funktio ϕ on diff.yhtälön

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

ratkaisu, jos se on välillä I $(\subseteq \mathbb{R})$ n kertaa derivoituva ja

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Esimerkki 1.3. Funktio $y = e^{-x}$ on yhtälön

$$y' + y = 0$$

ratkaisu koko reaaliakselilla. (Totea!)

Määritelmä 1.5. Jos ratkaisu annetaan muodossa $y = \phi(x)$, sanotaan sitä *eksplisiittiseksi* ratkaisuksi. Jos sitä vastoin ratkaisu annetaan muodossa $g(x, y) = 0$, niin ratkaisua sanotaan *implisiittiseksi*.

Esimerkki 1.4. Yhtälö $x^2 + y^2 = 1$ on yhtälön $y' = -\frac{x}{y}$ implisiittinen ratkaisu.

Huomautus 1.3. Differentiaaliyhtälöllä on yleensä enemmän kuin yksi ratkaisu, yleensä niitä on ääretön määrä. Esimerkiksi yhtälöllä

$$y' = x$$

on ääretön määrä ratkaisuja, nimittäin

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Määritelmä 1.6. Jos on olemassa sellainen mielivaltaisia vakioita sisältävä ratkaisufunktio, jonka erikoistapauksina saadaan "melkein"kaikki yksityisratkaisut, sanotaan ko. ratkaisufunktiota *yleiseksi ratkaisuksi*. Ratkaisuja, joita ei saada yleisestä ratkaisusta, sanotaan *erikoisratkaisuiksi*.

Esimerkki 1.5. Yhtälön

$$(y')^2 + 1 = \frac{1}{y^2}$$

yleinen ratkaisu on

$$(x - C)^2 + y^2 = 1, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Lisäksi sillä on erikoisratkaisut $y \equiv 1$, $y \equiv -1$. Esimerkiksi

$$x^2 + y^2 = 1$$

on yksityisratkaisu.

Määritelmä 1.7. *Alkuarvotehtävässä* diff.yhtälön ratkaisulle on annettu lisäehto yhdessä pisteessä x. *Reunaehtotehtävässä* lisäehto on annettu useammassa kuin yhdessä pisteessä.

Esimerkki 1.6. Tehtävä

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$$

on alkuarvotehtävä. Tehtävä

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

on reunaehtotehtävä. Ratkaise tehtävät! Vihje: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ on yleinen ratkaisu.

Luku 2

Joitakin 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöitä

2.1 Separoituva yhtälö

Määritelmä 2.1.1. 1. kertaluvun diff.yhtälöä sanotaan *separoituvaksi*, jos se voidaan kirjoittaa muodossa

$$y' = f(x)g(y),$$

missä f on (jollakin avoimella välillä I) jatkuva funktio ja g on (jollakin avoimella välillä J) jatkuvasti derivoituva funktio.

Lause 2.1.1. *Tarkastellaan yhtälöä*

$$y' = f(x)g(y), \tag{2.1}$$

missä f on avoimella välillä I jatkuva ja g on avoimella välillä J jatkuvasti derivoituva. Olkoon $J = (a, b)$, missä voi olla $a = -\infty$ tai $b = \infty$, sekä

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m < a_{m+1} = b,$$

missä $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ovat g:n nollakohdat. (Jos $m = 0$, niin g:llä ei ole nollakohtia.) Silloin yhtälöllä (2.1) *on erikoisratkaisut*

$$y \equiv a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

välillä I. Yhtälön (2.1) *muut ratkaisut muodostuvat yhtälöiden*

$$y' = f(x)g(y), \quad a_i < y < a_{i+1} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, m), \tag{2.2}$$

kaikista ratkaisuista. Yhtälön (2.2) *ratkaisujen kuvaajat kulkevat suorien $y = a_i$ ja $y = a_{i+1}$ välissä. Yhtälön* (2.2) *ratkaisu on muotoa*

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx. \tag{2.3}$$

Todistus. Oletetaan, että $y \equiv a_i$, missä a_i on funktion g nollakohta. Silloin $y' = 0$ ja $g(y) = 0$, ja näin ollen

$$y' = f(x)g(y).$$

Oletetaan sitten, että $a_i < y < a_{i+1}$. Tämä kohta käsitellään luennolla. Yksikäsitteisyyteen tarvitaan pykälän 2.8 tuloksia. □

Esimerkki 2.1.1. Yhtälö $y' = 2xy(y-1)$ on separoituva. Sovelletaan lausetta 2.1.1. Erikoisratkaisut ovat $y \equiv 0$, $y \equiv 1$. Etsitään yleinen ratkaisu:

$$\begin{aligned}
y' &= 2xy(y-1) \\
\frac{y'}{y(y-1)} &= 2x \\
\int \frac{dy}{y(y-1)} &= \int 2x dx \\
\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| &= x^2 + C', \quad C' \in \mathbb{R} \\
\left|\frac{y-1}{y}\right| &= e^{x^2}e^{C'} = Ce^{x^2}, \quad C > 0.
\end{aligned}$$

Jaetaan tarkastelu 3 tapaukseen:

Tapaus 1. Olkoon $y < 0$. Silloin saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{y-1}{y} &= Ce^{x^2}, \quad C > 0 \\
y &= \frac{1}{1 - Ce^{x^2}}, \qquad C > 1,\, x \in \mathbb{R} \quad \text{tai} \quad 0 < C \leq 1,\ |x| > \sqrt{\ln\frac{1}{C}}.
\end{aligned}$$

Tapaus 2. Olkoon $0 < y < 1$. Silloin saadaan

$$\begin{aligned}
-\frac{y-1}{y} &= Ce^{x^2}, \quad C > 0 \\
y &= \frac{1}{1 + Ce^{x^2}}, \qquad C > 0,\ x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Tapaus 3. Olkoon $y > 1$. Silloin saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{y-1}{y} &= Ce^{x^2}, \quad C > 0 \\
y &= \frac{1}{1 - Ce^{x^2}}, \qquad 0 < C < 1,\ |x| < \sqrt{\ln\frac{1}{C}}.
\end{aligned}$$

Esimerkki 2.1.2. Yhtälö

$$y' = 1 + x + y^2 + xy^2$$

voidaan ratkaista separoituvana

$$\begin{aligned}
y' &= (1+x)(1+y^2), \qquad 1+y^2 \neq 0 \\
\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx} &= 1+x \\
\int \frac{dy}{1+y^2} &= \int (1+x)dx \\
\arctan y &= x + \frac{1}{2}x^2 + C \\
y &= \tan(x + \frac{1}{2}x^2 + C).
\end{aligned}$$

2.2 Homogeenifunktioinen yhtälö

Määritelmä 2.2.1. 1. kertaluvun diff.yhtälö on *homogeenifunktioinen*, jos se voidaan kirjoittaa muodossa

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

missä f on (jollakin avoimella välillä) jatkuvasti derivoituva funktio.

Lause 2.2.1. *Kun homogeenifunktioiseen yhtälöön*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0, \tag{2.4}$$

tehdään sijoitus $u = \frac{y}{x}$, *muuntuu se separoituvaksi yhtälöksi*

$$u' = \frac{1}{x}(f(u) - u). \tag{2.5}$$

Yhtälön (2.4) ratkaisut $y : I \to \mathbb{R},\ 0 \notin I$, *saadaan muodossa*

$$y(x) = x\,u(x), \quad x \in I,$$

missä $u : I \to \mathbb{R}$ *käy läpi kaikki yhtälön (2.5) ratkaisut.*

Todistus. Tarkastellaan yhtälöä (2.4). Merkitään $u = y/x$, jolloin $y = ux$ ja edelleen $y' = u + u'x$. Tällöin yhtälö (2.4) tulee muotoon $u + u'x = f(u)$, joka on yhtäpitävä yhtälön (2.5) kanssa. Siis yhtälön (2.4) ratkaisut ovat $y = ux$, missä u käy läpi yhtälön (2.5) ratkaisut. □

Esimerkki 2.2.1. Yhtälö

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} - xy' = 0, \quad x > 0,$$

on homogeenifunktioinen, sillä se voidaan kirjoittaa muodossa

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Sijoitetaan $u = \frac{y}{x}$, jolloin $y' = (ux)' = u'x + u$. Saadaan

$$\begin{aligned} u'x + u &= u + \sqrt{1 + u^2} \\ u' &= \frac{\sqrt{1 + u^2}}{x} \quad (\sqrt{1 + u^2} > 0). \end{aligned}$$

Kyseessä on separoituva yhtälö. Ratkaistaan se seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} &= \int \frac{dx}{x} \\ \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) &= \ln|x| + C_1 = \ln x + C_1 \\ u + \sqrt{1 + u^2} &= x\, e^{C_1} = Cx, \quad C > 0 \\ \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} &= Cx \\ y + \sqrt{x^2 + y^2} &= Cx^2. \end{aligned}$$

Esimerkki 2.2.2. Yhtälö

$$y' = \frac{y^2 + xy - x^2}{x^2}, \quad x \neq 0, \tag{2.6}$$

on homogeenifunktioinen, sillä se voidaan kirjoittaa muodossa

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} - 1.$$

Sijoitetaan $u = \frac{y}{x}$, jolloin $y' = (ux)' = u'x + u$. Siis

$$\begin{aligned} u'x + u &= u^2 + u - 1 \\ u' &= \frac{u^2 - 1}{x}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Kyseessä on separoituva yhtälö.

Erikoisratkaisut: $u \equiv 1$ tai $u \equiv -1$ välillä I, missä $I = (0, \infty)$ tai $I = (-\infty, 0)$. Siis yhtälöllä (2.6) on erikoisratkaisut $y = x$ tai $y = -x$ välillä I, missä $I = (0, \infty)$ tai $I = (-\infty, 0)$.

Yleinen ratkaisu:

$$\begin{aligned}
\frac{u'}{u^2-1} &= \frac{1}{x} \\
\int \frac{du}{u^2-1} &= \int \frac{1}{x} dx \\
\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du &= \ln|x| + C' \\
\ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| &= \ln x^2 + 2C' = \ln x^2 + \ln C, \quad C > 0 \\
\left| \frac{u-1}{u+1} \right| &= Cx^2, \quad C > 0.
\end{aligned}$$

A. Tapaus $I = (0, \infty)$.

1^0 Olkoon $u > 1$ eli $\frac{y}{x} > 1$ eli $y > x$. Silloin

$$\begin{aligned}
\frac{u-1}{u+1} &= Cx^2, \quad C > 0, \\
\frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1} &= Cx^2 \\
\frac{y-x}{y+x} &= Cx^2.
\end{aligned}$$

2^0 Olkoon $-1 < u < 1$ eli $-x < y < x$. Silloin

$$\begin{aligned}
\frac{u-1}{u+1} &= -Cx^2, \quad C > 0, \\
\frac{y-x}{y+x} &= -Cx^2.
\end{aligned}$$

3^0 Olkoon $u < -1$ eli $y < -x$. Silloin

$$\begin{aligned}
\frac{u-1}{u+1} &= Cx^2, \quad C > 0, \\
\frac{y-x}{y+x} &= Cx^2.
\end{aligned}$$

B. Tapaus $I = (-\infty, 0)$ käsitellään vastaavasti.

2.3 Eksakti differentiaaliyhtälö

Tarkastellaan yhtälöä

(2.8) $$M(x, y) + N(x, y)y' = 0.$$

(Usein (2.8) kirjoitetaan differentiaalimuodossa

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.)$$

Yhtälöä (2.8) sanoaan *eksaktiksi*, jos on olemassa sellainen funktio $F(x,y)$, että

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} &= M(x,y), \\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} &= N(x,y). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Silloin (2.8) voidaan kirjoittaa

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} y' = 0$$

eli

$$\frac{d}{dx} F(x,y) = 0.$$

Siis

$$F(x,y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Lause 2.3.1. *Olkoon yhtälö* (2.8) *eksakti (suorakulmiossa $S \subseteq \mathbb{R}^2$) ja olkoon F sellainen funktio, että yhtälöt* (2.9) *toteutuvat (suorakulmiossa S). Silloin yhtälön* (2.8) *ratkaisu on*

$$F(x,y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Lause 2.3.2. *Oletetaan, että funktioilla M ja N on jatkuvat ensimmäiset osittaisderivaatat (suorakulmiossa S). Silloin yhtälö* (2.8) *on eksakti (suorakulmiossa S), jos ja vain jos*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2.10}$$

Todistus. ($\Rightarrow$) Oletetaan, että yhtälö (2.8) on eksakti. Silloin on olemassa sellainen funktio $F(x,y)$, että

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N.$$

Näin ollen

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Derivoimisjärjestyksen vaihtamisen sallivien ehtojen nojalla

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

eli

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

($\Leftarrow$) Oletetaan käänteisesti, että yhtälö (2.10) on voimassa. Sivuutetaan. $\square$

Esimerkki 2.3.1. Tarkastellaan yhtälöä

$$\underbrace{3x^2 \ln|x| + x^2 + y}_{M} + \underbrace{x}_{N} y' = 0.$$

1. Nyt

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Siis yhtälö on eksakti.

2. Etsitään funktio F. Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} &= 3x^2 \ln|x| + x^2 + y \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= x. \end{cases}$$

Yhtälöparin ensimmäisen yhtälön perusteella

$$F(x,y) = x^3 \ln|x| - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^3 + yx + \varphi(y).$$

Näin ollen yhtälöparin toisen yhtälön perusteella

$$x + \varphi'(y) = x$$

eli

$$\varphi(y) = C'.$$

Täten

$$F(x,y) = x^3 \ln|x| + yx$$

esimerkiksi.

3. Ratkaisu on

$$x^3 \ln|x| + yx = C.$$

Esimerkki 2.3.2. Tarkastellaan yhtälöä

$$\underbrace{(3x^2 + 4xy)}_{M}\, dx + \underbrace{(2x^2 + 2y)}_{N}\, dy = 0.$$

1. Nyt

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 4x.$$

Siis yhtälö on eksakti.

2. Etsitään funktio F. Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} &= 3x^2 + 4xy \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2x^2 + 2y. \end{cases}$$

Yhtälöparin ensimmäisen yhtälön perusteella

$$F(x,y) = x^3 + 2x^2y + \varphi(y).$$

Näin ollen yhtälöparin toisen yhtälön perusteella

$$2x^2 + \varphi'(y) = 2x^2 + 2y$$

eli

$$\varphi(y) = y^2 + C'.$$

Täten

$$F(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^2$$

esimerkiksi.

3. Ratkaisu on

$$x^3 + 2x^2y + y^2 = C.$$

2.4 Integroivan tekijän menetelmä

Tarkastellaan yhtälöä

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0, \tag{2.11}$$

joka ei ole eksakti. Integroivan tekijän menetelmässä pyritään löytämään sellainen funktio $\mu(x, y)$, että yhtälö

$$\mu(x, y)M(x, y) + \mu(x, y)N(x, y)y' = 0 \tag{2.12}$$

on eksakti. Tällöin yhtälön (2.11) sijasta ratkaistaankin yhtälö (2.12). On kuitenkin huomattava, että yhtälöiden (2.11) ja (2.12) ratkaisut eivät aina ole samat.

Funktiota $\mu(x, y)$ kutsutaan *integroivaksi tekijäksi*. Tällä kurssilla tarkastellaan vain sellaisia tapauksia, joissa löytyy vain x:stä tai vain y:stä riippuva integroiva tekijä.

Esimerkki 2.4.1. Tarkastellaan yhtälöä

$$\underbrace{2xy}_{M} + \underbrace{(y^2 - 3x^2)}_{N}\, y' = 0. \tag{2.13}$$

Nyt

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -6x,$$

joten yhtälö ei ole eksakti.

Pyritään löytämään integroiva tekijä μ niin, että

$$\mu(x, y)2xy + \mu(x, y)(y^2 - 3x^2)y' = 0.$$

Pitää olla

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mu}{\partial y}2xy+\mu 2x &= \frac{\partial\mu}{\partial x}(y^2-3x^2)-\mu 6x \\
\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial y}2xy+2x &= \frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x}(y^2-3x^2)-6x \\
\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x}(y^2-3x^2)-\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial y}2xy &= 8x.
\end{aligned}$$

Löytyykö vain x:stä riippuva integroiva tekijä?

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x}(y^2-3x^2) &= 8x \\
\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x} &= \frac{8x}{y^2-3x^2} \qquad \text{ei löydy.}
\end{aligned}$$

Löytyykö vain y:stä riippuva integroiva tekijä?

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial y} &= \frac{-8x}{2xy}=\frac{-4}{y} \qquad \text{löytyy} \\
&\dots \\
\mu &= e^{-\int\frac{4}{y}dy}=e^{-4\ln|y|}=y^{-4}
\end{aligned}$$

Saadaan yhtälö

$$\frac{2x}{y^3}+\frac{y^2-3x^2}{y^4}y'=0.$$

Esimerkki 2.4.2. Tarkastellaan yhtälöä

$$\underbrace{y}_{M}\,dx\,\underbrace{-x}_{N}\,dy=0 \qquad (\text{eli} \;\; y-xy'=0).$$

Nyt

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1, \quad \frac{\partial N}{\partial x}=-x,$$

joten yhtälö ei ole eksakti.

Pyritään löytämään integroiva tekijä μ niin, että

$$\mu(x,y)ydx-\mu(x,y)xdy=0.$$

Pitää olla

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mu}{\partial y}y+\mu &= -\frac{\partial\mu}{\partial x}x-\mu \\
\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial y}y+1 &= -\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x}x-1 \\
\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial y}y+\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x}x &= -2.
\end{aligned}$$

Löytyykö vain x:stä riippuva integroiva tekijä?

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x} &= \frac{-2}{x} \qquad \text{löytyy}\\ &\dots\\ \mu &= e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln|x|} = x^{-2}.\end{aligned}$$

Saadaan eksakti yhtälö

$$\begin{aligned}\frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy &= 0\\ &\dots\\ F(x,y) &= -\frac{y}{x}.\end{aligned}$$

Ratkaisu on $y = Cx$, missä $x > 0$ tai $x < 0$. (Toteuttaa yhtälön myös, kun $x = 0$. Totea!)

Huomautus 2.4.1. Edellisen esimerkin yhtälö voidaan ratkaista myös helpommalla tavalla.

2.5 Lineaarinen differentiaaliyhtälö

Määritelmä 2.5.1. *1. kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö* on muotoa

$$y' + a(x)y = b(x), \tag{2.14}$$

missä funktiot a ja b ovat (jollakin avoimella välillä) jatkuvia funktioita.

Lause 2.5.1. *Diff.yhtälön* (2.14) *yleinen ratkaisu on*

$$y = e^{-\int a(x)dx}\left(\int e^{\int a(x)dx}b(x)dx + C\right) \tag{2.15}$$

(missä $\int a(x)dx$ ja $\int e^{\int a(x)dx}b(x)dx$ tarkoittavat integroitavan funktion erästä primitiiviä).

Todistus. Kerrotaan yhtälö (2.14) puolittain lausekkeella $e^{\int a(x)dx}$ ($\neq 0$), jolloin saadaan

$$y'e^{\int a(x)dx} + a(x)ye^{\int a(x)dx} = b(x)e^{\int a(x)dx}.$$

Osittaisderivointisäännön perusteella

$$(ye^{\int a(x)dx})' = b(x)e^{\int a(x)dx}.$$

Integroimalla saadaan

$$ye^{\int a(x)dx} = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + C,$$

joka yhtäpitävä yhtälön (2.15) kanssa. $\square$

Esimerkki 2.5.1. Ratkaistaan lineaarinen yhtälö

$$y' + ay = 0, \quad a \in \mathbb{R},$$

soveltamalla lauseen todistuksen ideaa:

$$\begin{aligned}
e^{\int a dx} y' + e^{\int a dx} ay &= 0 \\
\left(e^{\int a dx} y\right)' &= 0 \\
e^{\int a dx} y &= C, \quad C \in \mathbb{R}, \\
e^{ax} y &= C \\
y &= Ce^{-ax}.
\end{aligned}$$

Esimerkki 2.5.2. Ratkaistaan lineaarinen yhtälö

$$y' + \frac{1}{x} y = x, \ x > 0,$$

soveltamalla lauseen todistuksen ideaa:

$$\begin{aligned}
e^{\int \frac{1}{x} dx} y' + e^{\int \frac{1}{x} dx} \frac{1}{x} y &= e^{\int \frac{1}{x} dx} x \\
\left(e^{\int \frac{1}{x} dx} y\right)' &= e^{\int \frac{1}{x} dx} x \qquad \left(e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} = |x| = x > 0\right) \\
e^{\int \frac{1}{x} dx} y &= \int e^{\int \frac{1}{x} dx} x dx + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\
xy &= \int x^2 dx + C \\
xy &= \frac{1}{3} x^3 + C \\
y &= \frac{1}{3} x^2 + \frac{C}{x}.
\end{aligned}$$

Huomautus 2.5.1. Lineaarisesta yhtälöstä tulee eksakti, kun integroitavaksi tekijäksi otetaan funktio $e^{\int a(x) dx}$.

Huomautus 2.5.2. Tarkastellaan jatkuvien reaalifunktioiden $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) vektoriavaruutta $\mathcal{C}(I)$ funktioiden yhteenlaskun

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

ja skalaarilla kertomisen

$$(af)(x) = a[f(x)], \quad a \in \mathbb{R},$$

suhteen. Jatkuvasti derivoituvat reaalifunktiot $f : I \to \mathbb{R}$ muodostavat vektoriavaruuden $\mathcal{C}(I)$ aliavaruuden $\mathcal{C}^{(1)}(I)$. Kuvaus

$$L : \mathcal{C}^{(1)}(I) \to \mathcal{C}(I), \quad Ly = y' + a(x)y,$$

on lineaarinen. *Homogeenisen* lineaarisen yhtälön

$$Ly = y' + a(x)y = 0$$

ratkaisujoukko on kuvauksen L ydin $\ker L$, joten kyseinen ratkaisujoukko muodostaa vektoriavaruuden $\mathcal{C}^{(1)}(I)$ aliavaruuden, ns. ratkaisuavaruuden. (Ratkaisuavaruuden dimensio on 1. Etsi jokin kanta!)

Täydellisen lineaarisen yhtälön

$$Ly = y' + a(x)y = b(x)$$

ratkaisu on muotoa

$$y = y_h + y_p,$$

missä y_h on homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu (ts. y_h käy läpi ytimen) ja y_p täydellisen yhtälön yksittäisratkaisu. (Todistus esitetään luennolla.) Esimerkissä 2.5.2 on $y_h = \frac{C}{x}$ ja $y_p = \frac{1}{3}x^2$. Huomaa, että esimerkiksi lineaarisilla yhtälöryhmillä on samanlainen ilmiö. (Vrt. lineaarialgebran kurssit.)

2.6 Bernoullin yhtälö

Bernoullin yhtälö on muotoa

$$y' + a(x)y = b(x)y^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}), \tag{2.16}$$

missä funktiot a ja b ovat jatkuvia (jollakin avoimella välillä I). Yhtälö on epälineaarinen, mutta se palautuu lineaariseksi sijoituksella $z = y^{1-\alpha}$.

Lause 2.6.1. *Yhtälön* (2.16) *ratkaisut y (mahdollista triviaaliratkaisua $y \equiv 0$ lukuun ottamatta) ovat avoimilla väleillä $J \subset I$ täsmälleen seuraavaa muotoa:*

(*i*) *Jos α on parillinen, niin*

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

missä $z : J \to \mathbb{R}$ käy läpi kaikki sellaiset yhtälön

$$z' + (1-\alpha)a(x)z = (1-\alpha)b(x) \tag{2.17}$$

ratkaisut, että $z(x) \neq 0$ aina, kun $x \in J$.

(*ii*) *Jos α on pariton, niin on kahta tyyppiä ratkaisuja:*

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}, \qquad y = -z^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

missä $z : J \to \mathbb{R}$ käy läpi kaikki sellaiset yhtälön (2.17) ratkaisut, että $z(x) > 0$ aina, kun $x \in J$.

Todistus. Luennolla. $\square$

Esimerkki 2.6.1. Ratkaistaan yhtälö

$$y' - \frac{1}{4}xy = -\frac{1}{4}xy^5.$$

Erikoisratkaisut: $y \equiv 0$.

Yleinen ratkaisu: Sijoitetaan $z = y^{-4}$. Tällöin $z' = -4y^{-5}y'$, joten $y' = -\frac{1}{4}y^5z'$.

Saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}y^5z' - \frac{1}{4}xy &= -\frac{1}{4}xy^5 \\ z' + xy^{-4} &= x \\ z' + xz &= x. \end{aligned}$$

Ratkaistaan tämä lineaarinen yhtälö ja palataan lopuksi alkuperäiseen funktioon y:

$$\begin{aligned} e^{\int xdx}z' + e^{\int xdx}xz &= e^{\int xdx}x \\ \left(e^{\int xdx}z\right)' &= e^{\int xdx}x \\ \left(e^{\frac{1}{2}x^2}z\right)' &= e^{\frac{1}{2}x^2}x \\ e^{\frac{1}{2}x^2}z &= \int e^{\frac{1}{2}x^2}xdx + C \\ e^{\frac{1}{2}x^2}z &= e^{\frac{1}{2}x^2} + C \\ z &= 1 + Ce^{-\frac{1}{2}x^2} \\ y &= \pm\left(1 + Ce^{-\frac{1}{2}x^2}\right)^{-\frac{1}{4}}, \qquad 1 + Ce^{-\frac{1}{2}x^2} > 0. \end{aligned}$$

Ehto $1 + Ce^{-\frac{1}{2}x^2} > 0$ toteutuu, kun

1) $C > -1, \quad x \in \mathbb{R}$,

2) $C \leq -1, \quad |x| > \sqrt{2\ln(-C)}$.

Esimerkki 2.6.2. Ratkaistaan yhtälö

$$y' + y = y^2(\cos x - \sin x).$$

Erikoisratkaisut: $y \equiv 0$.

Yleinen ratkaisu: Sijoitetaan $z = y^{-1}$. Tällöin $z' = -y^{-2}y'$, joten $y' = -y^2z'$.

Saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} -y^2z' + y &= y^2(\cos x - \sin x) \\ z' - y^{-1} &= \sin x - \cos x \\ z' - z &= \sin x - \cos x. \end{aligned}$$

Ratkaistaan tämä lineaarinen yhtälö ja palataan lopuksi alkuperäiseen funktioon y:

$$\begin{aligned}
z'e^{\int -1dx} - ze^{\int -1dx} &= e^{\int -1dx}\sin x - e^{\int -1dx}\cos x \\
z'e^{-x} - ze^{-x} &= e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x \\
(e^{-x}z)' &= e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x \\
e^{-x}z &= \int \Big(e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x\Big)\,dx + C \\
e^{-x}z &= -e^{-x}\sin x + C \\
z &= -\sin x + Ce^{x} \\
y &= \frac{1}{-\sin x + Ce^{x}}, \qquad \sin x \neq Ce^{x}.
\end{aligned}$$

2.7 2. kertaluvun differentiaaliyhtälön palauttamisesta 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöksi

A. Yhtälö

$$y'' = f(x, y')$$

palautuu 1. kertaluvun yhtälöksi sijoituksella $y'(x) = z(x)$ (tai lyh. $y' = z$). Silloin $y''(x) = z'(x)$ (tai lyh. $y'' = z'$).

B. Yhtälö

$$y'' = f(y, y')$$

palautuu 1. kertaluvun yhtälöksi sijoituksella $y' = z(y)$, jolloin $y'' = \frac{dz}{dy}z(y)$.

Esimerkki 2.7.1. Ratkaistaan yhtälö

$$xy''\ln x = y', \qquad x > 1.$$

Sijoitetaan $y'(x) = z(x)$ (tai lyh. $y' = z$). Saadaan

$$\begin{aligned}
xz'\ln x &= z \\
z' &= \frac{z}{x\ln x},
\end{aligned}$$

joka on separoituva.

Erikoisratkaisut: $z \equiv 0$ eli $y' \equiv 0$ eli $y \equiv C,\ C \in \mathbb{R}$.

Yleinen ratkaisu:

$$
\begin{aligned}
\frac{z'}{z} &= \frac{1}{x\ln x} \\
\int \frac{dz}{z} &= \int \frac{dx}{x\ln x} \\
\ln|z| &= \ln(\ln x) + C_1 = \ln(\ln x) + \ln C_2, \quad C_2 > 0 \\
\ln|z| &= \ln(C_2 \ln x) \\
|z| &= C_2 \ln x \\
z &= C_3 \ln x, \qquad C_3 \neq 0 \\
y' &= C_3 \ln x \\
&\dots \\
y &= C_3(x\ln x - x) + C_4, \quad C_4 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Kun etsitään ratkaisua alkuarvotehtävään, voi apuna käyttää seuraavaa karkeasti esitettyä lausetta.

Lause 2.7.1. *Tarkastellaan alkuarvotehtävää*

$$
\begin{cases}
y'' &= f(y', y, x) \\
y(x_0) &= y_0, \\
y'(x_0) &= y_1.
\end{cases}
$$

Olkoot f ja sen ensimmäiset osittaisderivaatat jatkuvia (pisteen x_0 sisältävällä välillä). Silloin alkuarvotehtävällä on yksikäsitteinen ratkaisu .

Todistus. Sivuutetaan. □

Esimerkki 2.7.2. Ratkaistaan alkuarvotehtävä

$$
y'' = e^{2y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.
$$

Sijoitetaan $y'(x) = z(y(x))$ eli $y' = z(y)$, joten

$$
y'' = y''(x) = \frac{d}{dx} y'(x) = \frac{d}{dx} z(y(x)) = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z(y).
$$

Saadaan

$$
\begin{aligned}
\frac{dz}{dy} z(y) &= e^{2y} \\
\int z(y) dz &= \int e^{2y} dy \\
\frac{1}{2} z(y)^2 &= \frac{1}{2} e^{2y} + C_1 \\
z(y)^2 &= e^{2y} + C_2.
\end{aligned}
$$

Siis

$$
z(y(x))^2 = e^{2y(x)} + C_2 \quad \text{eli} \quad y'(x)^2 = e^{2y(x)} + C_2.
$$

Kun asetetaan $x = 0$, saadaan $C_2 = 0$. Näin ollen

$$y'(x)^2 = e^{2y(x)} \quad \text{eli} \quad |y'(x)| = e^{y(x)}.$$

Koska $y'(0) > 0$, niin $y'(x) = e^{y(x)}$ tai lyhyemmin

$$\begin{aligned} y' &= e^y \\ \int e^{-y} dy &= \int dx \\ -e^{-y} &= x + C_3. \end{aligned}$$

Kun asetetaan $x = 0$, saadaan $C_3 = -1$.

Ratkaisu on $e^{-y} = 1 - x$ eli $y = -\ln(1 - x)$, missä $x < 1$.

2.8 Ratkaisun olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause

Määritelmä 2.8.1. Olkoon

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}.$$

Silloin funktion $f(x, y)$ sanotaan olevan joukossa D *jatkuva Lipschitzin mielessä* (tai lyhyesti *L-jatkuva*) muuttujan y suhteen, jos on olemassa sellainen $k > 0$, että

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k|y_1 - y_2|$$

aina, kun $(x, y_1), (x, y_2) \in D$.

Esimerkki 2.8.1. Olkoon $f(x, y) = xy^2$, kun $0 \leq x, y \leq 1$. Silloin määritelmän nojalla $f(x, y)$ on L-jatkuva y:n suhteen D:ssä. (Todistus luennolla.)

Huomautus 2.8.1. Jos $f(x, y)$ on L-jatkuva muuttujan y suhteen, niin jokaista kiinteää lukua x kohti $f(x, y)$ on jatkuva (tavallisessa mielessä) y:n suhteen.

Todistus. Luennolla. □

Huomautus 2.8.2. Käänteinen tulos ei pidä paikkaansa. Nimittäin jos

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1\}$$

ja $f(x, y) = \sqrt{y}$, niin jokaista lukua x kohti $f(x, y)$ on jatkuva y:n suhteen mutta $f(x, y)$ ei ole L-jatkuva y:n suhteen.

Todistus. □

Lause 2.8.1. *Oletetaan, että $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ on jatkuva joukossa D. Silloin $f(x, y)$ on L-jatkuva muuttujan y suhteen D:ssä.*

Todistus. Sovelletaan väliarvolausetta y:n suhteen. $\square$

Esimerkki 2.8.2. Olkoon $f(x, y) = xy^2$, kun $0 \leq x, y \leq 1$. Silloin lauseen 2.8.1 nojalla $f(x, y)$ on L-jatkuva y:n suhteen D:ssä.

Lause 2.8.2 (OY-lause). *Olkoon $f(x, y)$ suorakulmiossa D määritelty kahden muuttujan jatkuva funktio ja muuttujan y suhteen L-jatkuva funktio, ja olkoon (x_0, y_0) joukon D sisäpiste. Silloin on olemassa sellainen väli I $(\ni x_0)$, että alkuarvotehtävällä*

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

on yksikäsitteinen välillä I määritelty (jatkuvasti derivoituva) ratkaisu.

Todistus. Lauseen todistuksen yksityiskohtia ei esitetä. Todetaan kuitenkin, että ratkaisu löytyy niin sanotulla Picardin menetelmällä, jonka periaate annetaan seuraavassa luvussa. $\square$

Esimerkki 2.8.3. Lineaarisen, Bernoullin, eksaktin, separoituvan ja homogeenifunktioisen yhtälön OY-ominaisuus käsitellään luennolla.

2.9 Picardin menetelmä

Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \quad (\text{eli } \frac{dy}{dx} = f(x, y)) \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Muodostetaan approksimaatioiden jono $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots$ seuraavasti:

$\phi_0 :$ $\quad \phi_0(x) = y_0,$

$\phi_1 :$ $\quad \frac{d}{dx}\phi_1(x) = f(x, \phi_0(x)) \quad \text{ja} \quad \phi_1(x_0) = y_0, \quad$ joten

$$\phi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_0(t))dt$$

$\phi_2 :$ $\quad \frac{d}{dx}\phi_2(x) = f(x, \phi_1(x)) \quad \text{ja} \quad \phi_2(x_0) = y_0, \quad$ joten

$$\phi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_1(t))dt$$

$$\ldots$$

$\phi_n :$ $\quad \frac{d}{dx}\phi_n(x) = f(x, \phi_{n-1}(x)) \quad \text{ja} \quad \phi_n(x_0) = y_0, \quad$ joten

$$\phi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_{n-1}(t))dt.$$

Huomautus 2.9.1. Kun lauseen 2.8.2 ehdot ovat voimassa, niin voidaan todistaa, että yhtälön (2.18) ratkaisu on

$$y = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x).$$

Esimerkki 2.9.1. Ratkaistaan alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} y' &= xy, \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Picardin menetelmällä.

Nyt $f(x,y) = xy$ ja $x_0 = 0$, joten

$$\begin{aligned}
\phi_0(x) &= y_0 = 1 \\
\phi_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_0(t))dt = 1 + \int_0^x t\,dt = 1 + \int_0^x \frac{1}{2}t^2 dt = 1 + \frac{1}{2}x^2 \\
\phi_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_1(t))dt = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot 4}x^4? \\
\phi_3(x) &= \cdots = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}x^6
\end{aligned}$$

Siis ilmeisesti

$$\begin{aligned}
\phi_n(x) &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot 4}x^4 + \cdots + \frac{1}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 6}x^{2n} \\
&= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2^2}\frac{1}{2!}x^4 + \cdots + \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!}x^{2n} \\
&= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}x^2\right)^n.
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Koska lauseen 2.8.2 ehdot ovat voimassa, niin ratkaisu on

$$y = e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Huomautus 2.9.2. Esimerkin 2.9.1 yhtälö voidaan ratkaista myös helpommalla tavalla. (Vihje: separoituva.)

2.10 Numeerisia menetelmiä

Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Olkoon $h > 0$ ja $x_n = x_0 + nh$. Muodostetaan todellisten arvojen $y(x_1), y(x_2), \ldots$ approksimaatioiden jono $y_1, y_2, \ldots$

2.11 Eulerin menetelmä

Integroimalla pisteestä x_0 pisteeseen x_1 saadaan

$$y(x_1) - \underbrace{y(x_0)}_{=y_0} = \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_1} f(x_0, \underbrace{y(x_0)}_{=y_0})\,dx = f(x_0,y_0)h,$$

joten

$$y(x_1) \approx y_0 + f(x_0,y_0)h.$$

Valitaan

$$y_1 = y_0 + f(x_0,y_0)h.$$

Integroidaan nyt pisteestä x_1 pisteeseen x_2. Silloin saadaan

$$y(x_2) - \underbrace{y(x_1)}_{\approx y_1} = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx \approx \int_{x_1}^{x_2} f(x_1, \underbrace{y(x_1)}_{\approx y_1})\,dx \approx f(x_1,y_1)h,$$

joten

$$y(x_2) \approx y_1 + f(x_1,y_1)h.$$

Valitaan

$$y_2 = y_1 + f(x_1,y_1)h.$$

Näin jatkamalla saadaan

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n,y_n)h.$$

Esimerkki 2.11.1. Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$y' = \underbrace{1 - x + 4y}_{=f(x,y)}, \quad y(0) = 1,$$

Eulerin menetelmällä. Kun valitaan $h = 0.1$, saadaan

n	x_n	y_n	$f(x_n,y_n)$	$y_n + f(x_n,y_n)h$	$= y_{n+1}$
0	0	1	5	$1 + 5 \times 0.1$	$= 1.5$
1	0.1	1.5	6.9	$1.5 + 6.9 \times 0.1$	$= 2.19$
2	0.2	2.19	9.56	$2.19 + 9.56 \times 0.1$	$= 3.146$
3	0.3	3.146	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
4	0.4	$\cdots$			

2.12 Eulerin parannettu menetelmä

Tässä arvioidaan

$$y(x_1) - \underbrace{y(x_0)}_{=y_0} = \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{2}\left[f(x_0, \underbrace{y(x_0)}_{=y_0}) + f(x_1, y(x_1))\right] dx.$$

Koska arvoa $y(x_1)$ eikä sen approksimaatiota vielä tunneta, käytetään Eulerin menetelmää eli $y(x_1) \approx y_0 + f(x_0, y_0)h$. Siis

$$y(x_1) \approx y_0 + \frac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_0 + f(x_0, y_0)h)] \overset{\text{merk.}}{=} y_1.$$

Edelleen

$$y(x_2) - \underbrace{y(x_1)}_{\approx y_1} = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx \approx \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2}\left[f(x_1, \underbrace{y(x_1)}_{\approx y_1}) + f(x_2, \underbrace{y(x_2)}_{y_1 + f(x_1, y_1)h})\right] dx.$$

Siis

$$y(x_2) \approx y_1 + \frac{h}{2}[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_1 + f(x_1, y_1)h)] \overset{\text{merk.}}{=} y_2.$$

Näin saadaan

$$y(x_{n+1}) \approx y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + f(x_n, y_n)h)] \overset{\text{merk.}}{=} y_{n+1}.$$

Esimerkki 2.12.1. Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$y' = \underbrace{1 - x + 4y}_{=f(x,y)}, \quad y(0) = 1,$$

parannetulla Eulerin menetelmällä. Kun valitaan $h = 0.1$, saadaan

x_n	y_n	$y_n + f(x_n, y_n)h = z_{n+1}$	$y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, z_{n+1})]$
0	1	$1 + 5 \times 0.1 = 1.5$	$1 + 0.05[5 + 6.9] = 1.595$
0.1	1.595	$1.595 + 7.28 \times 0.1 = 2.323$	$\cdots$
0.2	2.4636	$\cdots$	
0.3	$\cdots$		

2.13 Runge-Kuttan menetelmä

Approksimaatiot saadaan kaavasta

$$y_{n+1} = y_n + K_n h,$$

missä

$$\begin{aligned}
K_n &= \frac{1}{6}(m_{n1} + 2m_{n2} + 2m_{n3} + m_{n4}),\\
m_{n1} &= f(x_n, y_n)\\
m_{n2} &= f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} m_{n1}),\\
m_{n3} &= f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} m_{n2}),\\
m_{n4} &= f(x_n + h, y_n + h m_{n3}).
\end{aligned}$$

Tässä esityksessä ei puututa tähän menetelmään täsmällisemmin.

Esimerkki 2.13.1. Alkuarvotehtävän

$$y' = \underbrace{1 - x + 4y}_{=f(x,y)}, \qquad y(0) = 1, \quad h = 0.1$$

ratkaisun approksimaatiot Eulerin, Eulerin parannetulla ja Runge-Kuttan menetelmällä ja tarkat arvot ovat

	Euler	Eulerin parannettu	Runge-Kutta	tarkka arvo
x	y_n	y_n	y_n	
$0,00$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$0,10$	1.5000	1.5950	1.6089	1.6090
$0,20$	2.1900	2.4636	2.5050	2.5053
$0,30$	3.1460	3.7371	3.8294	3.8301
$0,40$	4.4774	5.6099	5.7928	5.7942
$0,50$	6.3242	8.3697	8.7093	8.7120
$0,60$	8.9038	12.442	13.048	13.053
$0,70$	12.505	18.457	19.507	19.516
$0,80$	17.537	27.348	29.131	29.145
$0,90$	24.572	40.494	43.474	43.498
$1,00$	34.411	59.938	64.858	64.898.

2.14 Esimerkkejä sovelluksista

Tässä pykälässä vain saatujen yhtälöiden ratkaiseminen kuuluu koealueeseen. Yhtälöiden käytännöllistä taustaa ei tarvitse osata.

Esimerkki 2.14.1 (Putoava kappale)**.** Newtonin 2. lain mukaan kappaleeseen vaikuttava voima on

$$F = ma = m\frac{dv}{dt}.$$

Putoavaan kappaleeseen vaikuttavat maan vetovoima mg ja ilmanvastus, jonka oletetaan olevan muotoa cv, missä c on vakio. Näin ollen saadaan lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv$$

eli

$$\frac{dv}{dt} + \frac{c}{m}v = g.$$

(Ratkaise $v(t)$ ja $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$).

Esimerkki 2.14.2 (Populaation kasvu)**.** Joitakin populaatioita (esim. bakteerikantaa) voidaan kuvata melko tarkasti Bernoullin tyypin yhtälöllä

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2, \qquad P(0) = P_0, \tag{2.19}$$

missä $P(t)$ kuvaa populaatiota ajanhetkellä t ja a, b ovat positiivisia vakioita. Nimenomaan yhtälöä (2.19) kutsutaan ns. logistiseksi yhtälöksi (Ratkaise $P(t)$ ja $\lim_{t\to\infty} P(t)$.)

Esimerkki 2.14.3 (Radioaktiivinen hajoaminen)**.** Kokemusten mukaan radioaktiivinen hajoaminen voidaan kuvata matemaattisella mallilla

$$\frac{dN}{dt} = -kN, \qquad N(0) = N_0,$$

missä $N(t)$ on radioaktiivisten ytimien määrä hetkellä t ja k on positiivinen vakio.

Esimerkki 2.14.4 (Sekoitusongelma)**.** Tankissa on a litraa puhdasta vettä. Tankkiin aletaan pumpata suolaista vettä b litraa/min. Suolaa on c grammaa/litra. Samanaikaisesti tankista imetään sama määrä (= b litraa/min) täysin sekoitettua vettä. (Oletetaan, että tankissa on tehokkaat sekoittimet.) Merkitään suolan määrää tankissa funktiolla $y(t)$. Silloin

$$\frac{dy}{dt} = IN - OUT, \qquad y(0) = 0,$$

missä IN on tulevan suolan määrä ja OUT on lähtevän suolan määrä. Selvästi

$$\begin{aligned} IN &= bc \ \text{ grammaa/min}, \\ OUT &= b\frac{y(t)}{a} \ \text{ grammaa/min.} \end{aligned}$$

Siis

$$\frac{dy}{dt} = bc - b\frac{y(t)}{a}, \qquad y(0) = 0.$$

(Ratkaise $y(t)$ ja $\lim_{t\to\infty} y(t)$. Ilmeisesti $\lim_{t\to\infty} y(t) = ac$ grammaa.)

Esimerkki 2.14.5 (Käyräparven kohtisuorat leikkaajat)**.** Etsitään käyräparven

$$F(x, y, c) = 0 \tag{2.20}$$

kohtisuorat leikkaajat. Oletetaan, että (2.20) on yhtälön

$$y' = f(x, y)$$

ratkaisu. Silloin kohtisuorat leikkaajat saadaan ilmeisesti yhtälön

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}$$

ratkaisuina. (Kohtisuorien leikkaajien tangenttien kulmakertoimien tulo = -1.)

Etsitään konkreettisena esimerkkinä ympyräparven $x^2 + y^2 = c^2$ kohtisuorat leikkaajat. Parven differentiaaliyhtälö on

$$2x + 2yy' = 0$$

eli

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Kohtisuorien leikkaajien differentiaaliyhtälö on siis

$$y' = \frac{y}{x},$$

jonka ratkaisu on

$$y = kx, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki 2.14.6 (Ebbinghausin unohtamis- tai muistamiskäyrä)**.** Oletetaan, että henkilö oppii joukon sanoja. Olkoon m_0 opittu määrä, $m(t)$ muistissa oleva määrä hetkellä t ja m_∞ muistiin pysyvästi jäävä määrä. Ebbinghausin mukaan

$$\frac{dm}{dt} = -k(m - m_\infty), \quad m(0) = m_0,$$

missä k on positiivinen vakio. Näin ollen

$$m(t) = m_\infty + (m_0 - m_\infty)e^{-kt}$$

Mikä on vakion k ja unohtamisen välinen yhteys? (Harj.)

Luku 3

Joitakin 2. kertaluvun differentiaaliyhtälöitä

Tässä luvussa tutkitaan lähinnä toisen kertaluvun lineaarisia differentiaaliyhtälöitä. Niiden käyttäytymistä on luontevaa selittää lineaarialgebran keinoilla.

3.1 Funktioiden lineaarinen riippuvuus ja riippumattomuus

Tässä aliluvussa tarkastellaan reaalimuuttujan reaaliarvoisia funktioita.

Määritelmä 3.1.1. Funktiot $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ovat *lineaarisesti riippumattomia* joukossa I $(\subseteq \mathbb{R})$, jos ehdosta

$$C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \cdots + C_n\varphi_n = 0 \qquad \text{(nollafunktio)} \tag{3.1}$$

seuraa, että

$$C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0.$$

Muussa tapauksessa funktiot ovat *lineaarisesti riippuvia.* Ehto (3.1) tarkoittaa, että

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x) = 0 \qquad \forall x \in I.$$

Huomautus 3.1.1. Kaksi funktiota φ_1 ja φ_2 $\quad (\varphi_1, \varphi_2 \not\equiv 0)$ ovat lineaarisesti riippuvia, jos ja vain jos $\varphi_1 = C\varphi_2, \quad C \in \mathbb{R}$.

Määritelmä 3.1.2. Derivoituvien funktioiden φ_1, φ_2 *Wronskin determinantti* on

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Lause 3.1.1. *Olkoot funktiot φ_1 ja φ_2 derivoituvia välillä I. Jos φ_1 ja φ_2 ovat lineaarisesti riippuvia välillä I, niin*

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(x) = 0 \qquad \forall x \in I.$$

Todistus. Luennot/harj □

Seuraus 3.1.1. Jos on olemassa sellainen $x \in I$, että $W(\varphi_1, \varphi_2)(x) \neq 0$, niin φ_1 ja φ_2 ovat lineaarisesti riippumattomia välillä I.

Huomautus 3.1.2. Wronskin determinantin käsite ja ylläoleva lause (3.1) voidaan yleistää useammalle kuin kahdelle funktiolle.

Esimerkki 3.1.1. Olkoon

$$I = (0, \infty), \quad \varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = \ln x.$$

Todistetaan, että φ_1 ja φ_2 ovat lineaarisesti riippumattomia välillä I.

Tapa I. Sovelletaan lausetta 3.1.1:

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(x) = \begin{vmatrix} x & \ln x \\ 1 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 1 - \ln x.$$

Siis esim. $W(\varphi_1, \varphi_2)(1) \neq 0$, joten φ_1 ja φ_2 ovat lineaarisesti riippumattomia.

Tapa II. Käytetään määritelmää: Oletetaan, että

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) = 0 \qquad \forall x \in I$$

eli

$$C_1 x + C_2 \ln x = 0 \qquad \forall x \in (0, \infty).$$

Asetetaan

$$\begin{aligned} x = 1: &\qquad C_1 = 0, \\ x = 2: &\qquad 0 \cdot 2 + C_2 \ln 2 = 0, \quad \text{joten} \quad C_2 = 0. \end{aligned}$$

Siis $C_1 = C_2 = 0$. Näin ollen φ_1 ja φ_2 ovat lineaarisesti riippumattomia.

Huomautus 3.1.3. Lause 3.1.1 ei pidä paikkaansa käänteisesti, ts. sen avulla ei voida todistaa lineaarista riippuvuutta.

Esimerkki 3.1.2. Olkoon

$$I = \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = x^2, \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0. \end{cases}$$

Silloin

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

mutta φ_1 ja φ_2 ovat lineaarisesti riippumattomia. Nimittäin olkoon

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Asetetaan

$$\begin{aligned} x = 1: &\qquad C_1 + C_2 = 0 \\ x = -1: &\qquad C_1 - C_2 = 0. \end{aligned}$$

Siis $C_1 = C_2 = 0$.

Huomautus 3.1.4. Lause 3.1.1 pitää paikkansa myös käänteisesti, jos φ_1 ja φ_2 ovat yhtälön

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

ratkaisuja.

3.2 Homogeeninen 2. kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö

Homogeeninen 2. kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö on muotoa

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \tag{3.2}$$

missä $a_1(x)$ ja $a_2(x)$ ovat (jollakin avoimella välillä) jatkuvia funktioita.

Lause 3.2.1. *Alkuarvotehtävällä*

$$\begin{aligned} &y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \\ &y(x_0) = \alpha_1, \\ &y'(x_0) = \alpha_2, \end{aligned}$$

missä $a_1(x)$ ja $a_2(x)$ ovat välillä $I \subseteq \mathbb{R}$ jatkuvia funktioita, $x_0 \in I$ ja $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, on yksikäsitteinen ratkaisu.

Todistus. Sivuutetaan. □

Lause 3.2.2. *Olkoot φ_1 ja φ_2 yhtälön*

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad x \in I,$$

kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua. Silloin yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(Tällaiset funktiot φ_1 ja φ_2 löytyvät aina.)

Todistus. Luennot. □

Esimerkki 3.2.1. Olkoon

$$y'' + \frac{1}{x}y' = 0, \qquad x > 0. \tag{3.3}$$

Huomataan, että 1 ja $\ln x$ ovat yhtälön (3.3) ratkaisuja. Todetaan niiden lineaarinen riippumattomuus. Siis yleinen ratkaisu on

$$y = C_1 + C_2 \ln x.$$

Yhtälö (3.3) voidaan ratkaista myös sijoituksella $y' = z$ (eli $y'(x) = z(x)$).

Huomautus 3.2.1. Tarkastellaan jatkuvien reaalifunktioiden $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) vektoriavaruutta $\mathcal{C}(I)$ funktioiden yhteenlaskun ja skalaarilla kertomisen suhteen. Kahdesti jatkuvasti derivoituvat reaalifunktiot $f : I \to \mathbb{R}$ muodostavat vektoriavaruuden $\mathcal{C}(I)$ aliavaruuden $\mathcal{C}^{(2)}(I)$. Kuvaus

$$L : \mathcal{C}^{(2)}(I) \to \mathcal{C}(I), \quad Ly = y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y,$$

on lineaarinen.

Homogeenisen lineaarisen yhtälön

$$Ly = y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

ratkaisujoukko on kuvauksen L ydin $\ker L$, joten kyseinen ratkaisujoukko muodostaa vektoriavaruuden $\mathcal{C}^{(2)}(I)$ aliavaruuden, ns. ratkaisuavaruuden. Joukko $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ on ratkaisuavaruuden kanta, joten ratkaisuavaruuden dimensio on 2. Esimerkissä 3.2.1 kanta on $\{1, \ln x\}$. Ratkaisuavaruuden kantaa kutsutaan joissakin esityksissä *perusjärjestelmäksi*.

3.3 Vakiokertoiminen homogeeninen 2. kl lineaarinen differentiaaliyhtälö

Vakiokertoiminen homogeeninen 2. kl lineaarinen differentiaaliyhtälö on muotoa

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{3.4}$$

missä a_1 ja a_2 ovat vakioita. Sen *karakteristinen yhtälö* on

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0. \tag{3.5}$$

Differentiaaliyhtälön (3.4) ratkaisu saadaan karakteristisen yhtälön (3.5) juurten avulla seuraavan lauseen mukaisesti.

Lause 3.3.1. *Olkoot r_1 ja r_2 karakteristisen yhtälön* (3.5) *juuret. Silloin yhtälön* (3.4) *ratkaisu on*

a)
$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

kun $r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \quad r_1 \neq r_2$,

b)
$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx},$$

kun $r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$,

c)
$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

kun $r_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, r_2 = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$.

Todistus. a) Todistetaan, että $e^{r_1 x}$ ja $e^{r_2 x}$ ovat lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja. Luennot. b) Todistetaan, että e^{rx} ja xe^{rx} ovat lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja. Harj. c) Sivuutetaan. □

Esimerkki 3.3.1. Ratkaistaan yhtälö

$$y'' + 4y' + 3y = 0.$$

Lasketaan karakteristinen yhtälön juuret:

$$\begin{aligned}
&r^2 + 4r + 3 = 0 \\
&r = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \\
&r = -1 \quad \vee \quad r = -3.
\end{aligned}$$

Siis ratkaisu on

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki 3.3.2. Ratkaistaan yhtälö

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Lasketaan karakteristinen yhtälön juuret:

$$\begin{aligned}
&r^2 + 4r + 4 = 0 \\
&(r + 2)^2 = 0 \\
&r = -2.
\end{aligned}$$

Siis ratkaisu on

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki 3.3.3. Ratkaistaan yhtälö

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Lasketaan karakteristinen yhtälön juuret:

$$\begin{aligned}
&r^2 - 4r + 5 = 0 \\
&r = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} \\
&r = 2 \pm i \quad (= \alpha + \beta i, \text{ missä } \alpha = 2, \beta = 1).
\end{aligned}$$

Siis ratkaisu on

$$y = C_1 e^{2x} \sin x + C_2 e^{2x} \cos x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3.4 Yleinen 2. kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö

Yleinen (tai täydellinen) 2. kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö on muotoa

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x), \tag{3.6}$$

missä $a_1(x), a_2(x), b(x)$ ovat (jollakin avoimella välillä) jatkuvia funktioita.

Lause 3.4.1. *Yhtälön* (3.6) *yleinen ratkaisu on muotoa*

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \psi(x),$$

missä $C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$ *on vastaavan homogeenisen yhtälön*

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

yleinen ratkaisu ja $\psi(x)$ *on yhtälön* (3.6) *jokin yksityisratkaisu.*

Todistus. Luennot. □

Huomautus 3.4.1. Yleisen lineaarisen yhtälön

$$Ly = y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$$

ratkaisu on muotoa

$$y = y_h + y_p,$$

missä y_h on homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu

$$y_h = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$$

(ts. y_h käy läpi kuvauksen L ytimen) ja y_p on täydellisen yhtälön jokin yksittäisratkaisu

$$y_p = \psi(x).$$

Ratkaisu on itse asiassa kuvauksen L ytimen sivuluokka. (Vrt. 1. kertaluvun lineaariset diff.yhtälöt.) Esimerkissä 3.2.1 on $y_h = C_1 + C_2 \ln x$ ja $y_p = 0$.

Lause 3.4.1 tuottaa ratkaisumenetelmän yhtälön (3.6) ratkaisemiseksi. Menetelmä on kolmivaiheinen. Lisää menetelmiä esitellään pykälissä 3.5 - 3.9.

Tämän pykälän menetelmän vaiheet ovat:

<u>Vaihe 1.</u> Etsitään vastaavan homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu

$$y_h = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$$

a) karakteristisen yhtälön avulla, kun $a_1(x)$ ja $a_2(x)$ ovat vakiofunktioita (ks. §3.3),

$b)$ keksimällä (tai

$c)$ potenssisarjamenetelmällä (§3.6) tai Frobeniuksen menetelmällä (§3.7)).

Vaihe 2. Etsitään koko yhtälön jokin yksityisratkaisu $y_p = \psi(x)$

$a)$ määräämättömien kertoimien menetelmällä, kun $b(x)$ on polynomi, $b(x)$ on muotoa e^{ax}, $\sin ax$ tai $\cos ax$ tai kun $b(x)$ on edellisten tulo tai summa,

$b)$ vakion varioinnilla tai

$c)$ keksimällä.

Vaihe 3. Yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y = C_1\varphi(x) + C_2\varphi(x) + \psi(x).$$

Seuraavassa esitellään vaiheen 2 alavaiheet a ja b.

Vaihe 2a. Määräämättömien kertoimien menetelmä

Käytetään yritefunktiota, jonka kertoimet $A, B, \ldots$ (ja aste n) yritetään ratkaista sijoittamalla yrite yhtälöön.

$b(x)$	yksityisratkaisun yrite
$p(x)$, polynomi	$Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots + C$
$p(x)e^{ax}$	$(Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots + C)e^{ax}$
$p(x)e^{ax}\sin bx$	$(A_1x^n + B_1x^{n-1} + \cdots + C_1)e^{ax}\sin bx +$
	$(A_2x^n + B_2x^{n-1} + \cdots + C_2)e^{ax}\cos bx$
$p(x)e^{ax}\cos bx$	$--$

Huomautus 3.4.2. Termiä, joka on homogeenisen yhtälön $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ ratkaisu, ei kannata ottaa yritteeseen.

Esimerkki 3.4.1. Ratkaistaan yhtälö

$$y'' - 2y' - 3y = x.$$

Homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu karakteristisen yhtälön menetelmällä:

$$\begin{array}{lll} r^2 - 2r - 3 = 0 & \iff & r = 3 \quad \vee \quad r = -1 \\ y_h = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}. & & \end{array}$$

Yksityisratkaisu yritteellä:

$$\begin{array}{l} y = Ax + B \\ y' = A, \quad y'' = 0 \\ 0 - 2A - 3(Ax + B) = x \\ -3Ax - 2A - 3B = x \\ \begin{cases} A &= -\frac{1}{3} \\ B &= \frac{2}{9}. \end{cases} \end{array}$$

Yleinen ratkaisu:

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}.$$

Esimerkki 3.4.2. Ratkaistaan yhtälö

$$y'' - 2y' - 3y = \sin x.$$

Homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}.$$

Etsitään yksityisratkaisu yritteellä:

$$\begin{aligned} y &= A\sin x + B\cos x \\ y' &= A\cos x - B\sin x \\ y'' &= -A\sin x - B\cos x. \end{aligned}$$

Sijoittamalla saadaan

$$(-4A + 2B)\sin x + (-2A - 4B)\cos x = \sin x$$
$$\begin{cases} -4A + 2B &= 1 \\ -2A - 4B &= 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} A &= -\frac{1}{5} \\ B &= \frac{1}{10}. \end{cases}$$

Yleinen ratkaisu on

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{5}\sin x + \frac{1}{10}\cos x.$$

Esimerkki 3.4.3. Ratkaistaan yhtälö

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

Homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Yksityisratkaisun yrite

$$y = (Ax + B)e^x$$

toteuttaa homogeenisen yhtälön, joten sitä ei kannata yrittää. Samoin yritteestä

$$y = (Ax^2 + Bx + C)e^x$$

ei kannata ottaa mukaan termiä $(Bx + C)e^x$. Valitaan yrite

$$\begin{aligned} y &= Ax^2 e^x \\ y' &= 2Axe^x + Ax^2 e^x \\ y'' &= 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2 e^x. \end{aligned}$$

Sijoitetaan y, y', y'' yhtälöön, jolloin saadaan

$$2Ae^x = e^x$$
$$A = \frac{1}{2}.$$

Yleinen ratkaisu on

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x.$$

Vaihe 2b. Vakioiden variointi

Jos $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ ovat homogeenisen yhtälön kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua, niin yksityisratkaisu saadaan kaavalla

$$y_p = C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x),$$

missä

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\int \frac{\varphi_2(x)b(x)}{W(\varphi_1,\varphi_2)(x)}\,dx, \\ C_2(x) &= \int \frac{\varphi_1(x)b(x)}{W(\varphi_1,\varphi_2)(x)}\,dx. \end{aligned}$$

Esimerkki 3.4.4. Ratkaistaan yhtälö

$$y'' + y = \tan x, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y_h = D_1 \underbrace{\sin x}_{\varphi_1(x)} + D_2 \underbrace{\cos x}_{\varphi_2(x)}.$$

Etsitään yksityisratkaisu vakion varioinnilla:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\int \frac{\cos x \tan x}{W(\varphi_1,\varphi_2)(x)}\,dx, \qquad W(\varphi_1,\varphi_2)(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \\ &= \int \cos x \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\cos x, \\ C_2(x) &= \int \frac{\sin x \tan x}{W(\varphi_1,\varphi_2)(x)}\,dx = -\int \sin x \frac{\sin x}{\cos x}\,dx \\ &= \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x}\,dx = \int \cos x\,dx - \int \frac{1}{\cos x}\,dx \\ &= \sin x - \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx = \sin x - \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx \\ &= \sin x - \int \frac{dt}{1-t^2} = \sin x - \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)\,dt \\ &= \sin x - \frac{1}{2}\left(-\ln|1-t| + \ln|1+t|\right) = \sin x - \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}. \end{aligned}$$

Yleinen ratkaisu on

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= D_1 \sin x + D_2 \cos x + C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x \\ &= D_1 \sin x + D_2 \cos x - \cos x \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}. \end{aligned}$$

3.5 ”uv”-keino

Ratkaistava yhtälö on

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x). \tag{3.7}$$

Merkitään $y = uv$. Silloin $y' = uv' + u'v$, $y'' = u''v + 2u'v' + uv''$. Sijoitetaan y, y', y'' yhtälöön (3.7). Saadaan

$$u(v'' + a_1(x)v' + a_2(x)v) + u'(2v' + a_1(x)v) + u''v = b(x). \tag{3.8}$$

Kiinnitetään v.

1. vaihtoehto

$$v'' + a_1(x)v' + a_2(x)v = 0$$

eli v on homogeenisen yhtälön jokin ratkaisu.

2. vaihtoehto

$$2v' + a_1(x)v = 0$$

eli

$$v = e^{-\frac{1}{2}\int a_1(x)\,dx} \qquad \text{(esim.)}.$$

Ratkaistaan u (kaikki ratkaisut) yhtälöstä (3.8). Silloin yhtälön (3.7) ratkaisu on

$$y = uv.$$

Esimerkki 3.5.1. Ratkaistaan yhtälö

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \left(\frac{2}{x^2} + 1\right) y = x, \qquad x > 0. \tag{3.9}$$

Merkitään $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, $y'' = u''v + 2u'v' + uv''$. Saadaan

$$u\left(v'' - \frac{2}{x}v' + \left(\frac{2}{x^2} + 1\right) v\right) + u'\left(2v' - \frac{2}{x}v\right) + u''v = x. \tag{3.10}$$

Valitaan 2. vaihtoehto

$$2v' - \frac{2}{x}v = 0.$$

Siis

$$v = x \qquad \text{(esim.)}.$$

Silloin $v' = 1$, $v'' = 0$. Silloin funktiolle u saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} u\underbrace{\left(-2x^{-1} + (2x^{-2} + 1)x\right)}_{=x} + u''x &= x \qquad | : x\,(> 0) \\ u + u'' &= 1. \qquad (3.11) \end{aligned}$$

Käytetään määräämättömien kertoimien menetelmää. Homogeenisen yhtälön ratkaisu: $r^2+1 = 0$, $\quad r = \pm i$, $\quad u = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Yksityisratkaisu: esim. $u = 1$. Yhtälön (3.11) yleinen ratkaisu: $u = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1$.

Yhtälön (3.9) yleinen ratkaisu

$$y = uv = C_1 x \cos x + C_2 x \sin x + x.$$

Esimerkki 3.5.2. Ratkaistaan yhtälö

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0, \qquad x > 0,$$

eli yhtälö

$$x^2y'' + xy' - y = 0.$$

Homogeenisen yhtälön (joka on tässä sama kuin varsinainen yhtälö) yksi ratkaisu on $y = x$. Siis valitaan

$$v = x \qquad \text{(1. vaihtoehto)}.$$

Merkitään $y = ux,\ y' = u'x + u,\ y'' = u''x + 2u'$. Sijoitetaan y, y', y'', jolloin saadaan

$$\begin{aligned} x^2(u''x + 2u') + x(u'x + u) - ux &= 0, \\ u'' + \frac{3}{x}u' &= 0. \end{aligned}$$

Ratkaistaan u. Merkitään $u' = z$ (eli $u'(x) = z(x)$). Nyt

$$\begin{aligned} z' + \frac{3}{x}z &= 0 \qquad | \cdot e^{\int \frac{3}{x}\,dx} = x^3 \qquad\qquad \text{(lineaarinen)} \\ z &= C_1x^{-3} \\ u' &= C_1x^{-3} \\ u &= -\frac{1}{2}C_1x^{-2} - C_2. \end{aligned}$$

Varsinaisen yhtälön ratkaisu on

$$y = ux = -\frac{1}{2}C_1x^{-1} - C_2x = C_3x^{-1} + C_2x.$$

Huomautus 3.5.1. Ratkaise tehtävä myös Frobeniuksen menetelmällä (§3.7) ja Eulerin yhtälönä (§3.9).

3.6 Potenssisarjamenetelmä

Tarkastellaan reaalimuuttujan reaalikertoimisia sarjoja ja reaalimuuttujan reaaliarvoisia funktioita.

Lause 3.6.1. Oletetaan, että sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - x_0)^k$$

suppenee, kun $|x - x_0| < R$ ($R > 0$). Sen määräämän funktion derivaatta on

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} kc_k(x - x_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k(x - x_0)^{k-1},$$

missä $|x - x_0| < R$. Kahden sarjan summa on

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} d_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k + d_k)(x - x_0)^k,$$

missä $|x - x_0| < R, \quad R \geq \min\{R_c, R_d\}$, ja tulo on

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k (x - x_0)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} c_i d_{k-i}\right)(x - x_0)^k,$$

missä $|x - x_0| < R, \quad R \geq \min\{R_c, R_d\}$. Sarjojen yhtäsuuruus saadaan kaavasta

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (x - x_0)^k \quad \Longleftrightarrow \quad c_k = d_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Määritelmä 3.6.1. Funktio f on *analyyttinen* pisteessä x_0, jos sillä on sarjakehitelmä pisteen x_0 jossakin ympäristössä.

Lause 3.6.2. *Oletetaan, että funktiot $a_1(x), a_2(x)$ ja $b(x)$ ovat analyyttisiä pisteessä x_0. Silloin yhtälön*

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x) \tag{3.12}$$

ratkaisu y on analyyttinen pisteessä x_0, ts. y voidaan kirjoittaa muodossa

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k. \tag{3.13}$$

Jos funktioiden $a_1(x)$, $a_2(x)$ ja $b(x)$ sarjakehitelmät suppenevat vastaavilla väleillä $|x - x_0| < R_1$, $|x - x_0| < R_2$ ja $|x - x_0| < R$, niin sarjakehitelmä (3.13) *suppenee ainakin välillä $|x - x_0| < \min\{R_1, R_2, R\}$.*

Todistus. Sivuutetaan □

Potenssisarjamenetelmässä kehitelmä (3.13) sijoitetaan yhtälöön (3.12) ja pyritään ratkaisemaan tuntemattomat kertoimet c_k. Aina ei löydetä yleistä kaavaa kertoimille c_k, vaan joudutaan tyytymään kehitelmän (3.13) alkupään termeihin.

Esimerkki 3.6.1. Tarkastellaan yhtälöä

$$y'' + xy' + y = 0.$$

Tässä $a_1(x) = x$, $a_2(x) = 1$ ja $b(x) = 0$, jotka ovat analyyttisiä pisteessä 0. Siis yhtälön ratkaisu on analyyttinen. Merkitään

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Silloin

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} c_k k x^{k-1}, \qquad y'' = \sum_{k=0}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-2}.$$

Siis

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + x\sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0 \\
&\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0 \\
&\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0 \\
&\sum_{k=0}^{\infty} [\underbrace{(k+2)(k+1)c_{k+2} + (k+1)c_k}_{=0}] x^k = 0.
\end{aligned}$$

Saadaan kaava

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} + (k+1)c_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

missä c_0 ja c_1 voidaan valita mielivaltaisesti.

$$\begin{array}{lrcl}
(k=0) & c_2 & = & -\frac{c_0}{2} \\
(k=1) & c_3 & = & -\frac{c_1}{3} \\
(k=2) & c_4 & = & -\frac{c_2}{4} = \frac{c_0}{2\cdot 4} \\
(k=3) & c_5 & = & -\frac{c_3}{5} = \frac{c_1}{3\cdot 5} \\
 & & \cdots &
\end{array}$$

Ratkaisu

$$\begin{aligned}
y &= c_0 + c_1 x - \frac{c_0}{2}x^2 - \frac{c_1}{3}x^3 + \frac{c_0}{2\cdot 4}x^4 + \frac{c_1}{3\cdot 5}x^5 - \cdots \\
&= c_0\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 4} + - \cdots\right) + c_1\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3\cdot 5} + - \cdots\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

3.7 Frobeniuksen menetelmä

Tarkastellaan homogeenista yhtälöä

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

missä $(x-x_0)a_1(x)$ ja $(x-x_0)^2 a_2(x)$ ovat analyyttisiä pisteessä x_0. Tiedetään, että ratkaisu on muotoa

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x),$$

missä φ_1 ja φ_2 ovat lineaarisesti riippumattomia. Nyt pyritään löytämään 2 muotoa

$$y = (x-x_0)^r \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k$$

(missä $b_0 = 1$) olevaa lineaarisesti riippumatonta ratkaisua

$$(3.14) \qquad (x-x_0)^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k,$$

$$(3.15) \qquad (x-x_0)^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (x-x_0)^k.$$

Silloin siis yhtälön ratkaisu on

$$(3.16) \qquad y = C_1 (x-x_0)^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k + C_2 (x-x_0)^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (x-x_0)^k.$$

Huomautus 3.7.1. Jos $r_1 \neq r_2$, niin (3.14) ja (3.15) ovat lineaarisesti riippumattomat.

Huomautus 3.7.2. Jos $(x-x_0)a_1(x)$:n ja $(x-x_0)a_2(x)$:n suppenemissäteet ovat vastaavasti R_1 ja R_2, niin (3.16) suppenee ainakin, kun $0 < |x - x_0| < \min\{R_1, R_2\}$.

Todistus. Sivuutetaan. □

Huomautus 3.7.3. Menetelmä ei tuota tulosta aina tässä muodossa. Silloin voidaan käyttää "muunnettua"Frobeniuksen menetelmää (johon ei kuitenkaan puututa tällä kurssilla).

Huomautus 3.7.4. Eulerin tyypin yhtälö

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

on tarkasteltavaa muotoa. Eulerin tyypin yhtälö voidaan ratkaista myös käyttämällä sijoitusta $x = e^t$ (ks. §3.9).

Esimerkki 3.7.1. Tarkastellaan yhtälöä

$$y'' + \underbrace{-\frac{1}{2x}}_{a_1(x)} y' + \underbrace{\frac{x-5}{2x^2}}_{a_2(x)} y = 0, x > 0,$$

eli yhtälöä

$$(3.17) \qquad 2x^2y'' - xy' + (x-5)y = 0.$$

Nyt funktiot

$$\begin{aligned} xa_1(x) &= \tfrac{-1}{2} \\ x^2a_2(x) &= \tfrac{1}{2}(x-5) \end{aligned}$$

ovat analyyttisiä pisteessä $x_0 = 0$ ja $R_1 = R_2 = \infty$. Merkitään

$$(3.18) \qquad y = x^r \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+r},$$

missä $b_0 = 1$. Sijoitetaan (3.18) yhtälöön (3.17), jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
2x^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)b_kx^{k+r-2} &- x\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)b_kx^{k+r-1}+\\
+(x-5)\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^{k+r} &= 0\\
2\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)b_kx^{k+r} &- \sum_{k=0}^{\infty}(k+r)b_kx^{k+r}+\\
+\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^{k+r+1}}_{\sum_{k=1}^{\infty}b_{k-1}x^{k+r}}-5\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^{k+r} &= 0.
\end{aligned}$$

Saadaan

$$\begin{aligned}
&\underbrace{[2r(r-1)-r-5]}_{=0}\underbrace{b_0}_{=1}x^r\\
(3.19)\quad &+\sum_{k=1}^{\infty}\{[2(k+r)(k+r-1)-(k+r)-5]b_k+b_{k-1}\}x^{k+r}=0.
\end{aligned}$$

Siis

$$2r(r-1)-r-5=0 \quad \text{eli} \quad r=\frac{5}{2},\ r=-1.$$

1^0 Olkoon $r=\frac{5}{2}$. Silloin yhtälön (3.19) nojalla

$$\begin{aligned}
&\Big(2(k+\tfrac{5}{2})(k+\tfrac{5}{2}-1)-(k+\tfrac{5}{2})-5\Big)b_k+b_{k-1}=0, \quad k=1,2,\ldots\\
&b_k=-\tfrac{b_{k-1}}{k(2k+7)}, \quad k=1,2,\ldots \quad (b_0=1)
\end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned}
b_1 &= -\frac{b_0}{9}=-\frac{1}{9}\\
b_2 &= -\frac{b_1}{22}=-\frac{1}{198}\\
b_3 &= \cdots
\end{aligned}$$

Siis

$$y=x^{\frac{5}{2}}\left(1-\frac{1}{9}x+\frac{1}{198}x^2-+\cdots\right). \tag{3.20}$$

2^0 Olkoon $r=-1$. Silloin yhtälön (3.19) nojalla

$$\begin{aligned}
[2(k-1)(k-2)-(k-1)-5]b_k+b_{k-1} &= 0, \quad k=1,2,\ldots\\
b_k &= -\frac{b_{k-1}}{k(2k-7)}
\end{aligned}$$

eli

$$b_1 = \frac{1}{5}, \quad b_2 = \frac{1}{30}, \quad b_3 = \cdots$$

Siis

$$y = x^{-1}\left(1 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{30}x^2 + \cdots\right). \tag{3.21}$$

Ratkaisut (3.20) ja (3.21) ovat lineaarisesti riippumattomia. Siis yleinen ratkaisu on

$$\begin{aligned} y &= C_1 x^{\frac{5}{2}}\left(1 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{198}x^2 - + \cdots\right) \\ &+ C_2 x^{-1}\left(1 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{30}x^2 + \cdots\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Tutkitaan vielä sarjan suppenemista. Koska $R_1 = R_2 = \infty$, niin (3.22) suppenee, kun $0 < |x| < \infty$.

3.8 Laplace-muunnos

Määritelmä 3.8.1. Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *Laplace-muunnos* on

$$\mathcal{L}\{f(x); s\} = \overline{f}(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}\,dx$$

(niillä luvun s ($\in \mathbb{R}$) arvoilla, joilla ko. integraali suppenee).

Huomautus 3.8.1. Jos $\overline{f}(s_0)$ on olemassa, niin $\overline{f}(s)$ on olemassa aina, kun $s \geq s_0$.

Esimerkki 3.8.1. Jos $f(x) = e^{ax}$, niin

$$\begin{aligned} \overline{f}(s) &= \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{ax}e^{-sx}\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{(a-s)x}\,dx = \frac{1}{a-s}\lim_{M\to\infty}\Big/_0^M e^{(a-s)x} \\ &= \frac{1}{a-s}(0-1) = \frac{1}{s-a}, \qquad s > a. \end{aligned}$$

Lause 3.8.1. *Oletetaan, että f on joukossa $[0, \infty)$ jatkuvasti derivoituva funktio ja että*

$$|f(x)| \leq Ce^{ax}, \quad x \geq x_0,$$

missä C, a, x_0 ovat ei-negatiivisia vakioita. Silloin

$$\overline{f'}(s) = s\overline{f}(s) - f(0), \quad s > x_0.$$

Todistus. Osittaisintegroinnilla saadaan

$$\begin{aligned}
\overline{f'}(s) &= \lim_{M\to\infty} \int\limits_0^M f'(x)e^{-sx}\,dx \\
&= \lim_{M\to\infty} \left[\Big/_0^M e^{-sx} f(x) + \int\limits_0^M e^{-sx} s f(x)\,dx \right] \\
&= \lim_{M\to\infty} \left[\underbrace{e^{-sM} f(M)}_{\to 0} - e^0 f(0) + s \int\limits_0^M e^{-sx} f(x)\,dx \right] \\
&= s \int\limits_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx - f(0) \\
&= s\overline{f}(s) - f(0).
\end{aligned}$$

□

Seuraus 3.8.1. Jos funktiot $f^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$, toteuttavat edellisen lauseen ehdot, niin

$$\overline{f^{(k)}}(s) = s^k \overline{f}(s) - \sum_{i=0}^{k-1} s^{k-i-1} f^{(i)}(0), \quad s > x_0,$$

ja erikoisesti

$$\overline{f''}(s) = s^2 \overline{f}(s) - s f(0) - f'(0), \quad s > x_0,$$

Todistus. Induktiolla □

Lause 3.8.2. *Laplace-muunnos on lineaarinen, ts.*

$$\overline{(af + bg)} = a\overline{f} + b\overline{g} \qquad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Todistus. Seuraa suoraan määritelmästä. □

Lause 3.8.3. *Jos funktiot f ja g ovat jatkuvia ja jos $\overline{f} = \overline{g}$, niin $f = g$ (tai $f(x) = g(x)$, kun $x > 0$).*

Todistus. Sivuutetaan. Kyseessä on kuuluisa Lerchin lause, jonka todistus löytyy kirjallisuudesta. □

Huomautus 3.8.2. Kun Laplace-muunnosta sovelletaan diff.yhtälöihin, ei kannattane tutkia Laplace-muunnoksen olemassaoloa. Sen sijaan tarkistetaan, onko saatu ratkaisu oikea.

Laplace-muunnos alkuarvotehtävässä, alkuehto pisteessä 0

Esimerkki 3.8.2. Ratkaistaan alkuarvotehtävä

$$y' + 2y = \underbrace{e^{-x}}_{=b(x)}, \qquad y(0) = 0.$$

Laplace-muunnoksella saadaan

$$\begin{aligned}
\overline{(y' + 2y)}(s) &= \bar{b}(s) = \frac{1}{s+1} \\
\overline{y'}(s) + 2\overline{y}(s) &= \frac{1}{s+1} \\
s\overline{y}(s) - y(0) + 2\overline{y}(s) &= \frac{1}{s+1} \\
(s+2)\overline{y}(s) &= \frac{1}{s+1} \\
\overline{y}(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} \\
y &= e^{-x} - e^{-2x}.
\end{aligned}$$

Esimerkki 3.8.3. Ratkaistaan alkuarvotehtävä

$$y'' - y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Laplace-muunnoksella saadaan

$$\begin{aligned}
\overline{(y'' - y)}(s) &= 0 \\
\overline{y''}(s) + \overline{y}(s) &= 0 \\
s^2\overline{y}(s) - sy(0) - y'(0) - \overline{y}(s) &= 0 \\
(s^2 + 1)\overline{y}(s) &= 1 \\
\overline{y}(s) &= \frac{1}{s^2 - 1} = \frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)} \\
y &= \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x} = \sinh x.
\end{aligned}$$

Määritelmä 3.8.2. Funktioiden f ja g *konvoluutio* $f * g$ on

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\,dt.$$

Lause 3.8.4. *Konvoluution Laplace-muunnos on*

$$\overline{(f * g)}(s) = \overline{f}(s)\overline{g}(s).$$

Todistus. Perustuu 2-kertaisen integraalin ominaisuuksiin. □

Esimerkki 3.8.4. Ratkaistaan alkuarvotehtävä

$$y'' + y = x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Kun otetaan puolittain Laplace-muunnokset, saadaan

$$\begin{aligned}
\overline{(y'' + y)}(s) &= \frac{1}{s^2} \\
\overline{y''}(s) + \overline{y}(s) &= \frac{1}{s^2} \\
s^2\overline{y}(s) - 2y(0) - y'(0) + \overline{y}(s) &= \frac{1}{s^2} \\
\overline{y}(s) &= \frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s^2}.
\end{aligned}$$

Tästä voidaan jatkaa eri tavoilla.

I tapa: Jaetaan edellisen yhtälön oikea puoli osamurtoihin

$$\overline{y}(s) = -\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2}$$

ja etsitään y taulukosta, jolloin saadaan

$$y = -\sin x + x.$$

II tapa: Sovelletaan konvoluutiota. Silloin

$$\overline{y}(s) = \frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s^2} = \overline{f}(s)\overline{g}(s) = \overline{(f * g)}(s),$$

jossa $f(x) = \sin x$ ja $g(x) = x$. Näin ollen

$$y = (f*g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\,dt = \int_0^x \sin(x-t)\cdot t\,dt = \cdots \text{ (osittaisintegrointi)} = x - \sin x.$$

3.9 Eulerin yhtälö

Yhtälöä

$$ax^2y'' + bxy' + cy = F(x),$$

missä a, b, c ovat reaalivakioita, sanotaan Eulerin yhtälöksi (tai Cauchyn ja Eulerin yhtälöksi). Kun $x > 0$, voidaan merkitä $x = e^t$ (ja $y(x) = z(t)$). Silloin

$$\begin{aligned}
y' &= y'(x) &= \tfrac{1}{x}z'(t), \\
y'' &= y''(x) &= \tfrac{1}{x^2}(z''(t) - z'(t))
\end{aligned}$$

ja Eulerin yhtälö muuntuu lineaariseksi vakiokertoimiseksi yhtälöksi

$$az''(t) + (b-a)z'(t) + cz(t) = F(e^t).$$

(Kun $x < 0$, merkitään $x = -e^t$.)

Esimerkki 3.9.1. Ratkaistaan yhtälö

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad x > 0.$$

Sijoitetaan $x = e^t$ ja merkitään $y(x) = z(t)$. Silloin

$$\begin{array}{rcccl} y' & = & y'(x) & = & \frac{1}{x}z'(t), \\ y'' & = & y''(x) & = & \frac{1}{x^2}(z''(t) - z'(t)), \end{array}$$

joten saadaan yhtälö

$$z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = 0.$$

Karakteristinen yhtälö on

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

eli

$$(r-1)(r-2) = 0.$$

Siis

$$z(t) = C_1e^t + C_2e^{2t},$$

joten

$$y(x) = C_1x + C_2x^2.$$

3.10 Lineaarinen n. kertaluvun diff.yhtälö

Tarkastellaan aluksi homogeenista yhtälöä

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \tag{3.23}$$

missä funktiot $a_i(x)$ ovat jatkuvia. Silloin jos $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ ovat yhtälön (3.23) n lineaarisesti riippumatonta ratkaisua, niin yleinen ratkaisu on

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x), \qquad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}.$$

Jos funktiot $a_i(x)$ ovat vakioita (merk. a_i), niin lineaarisesti riippumattomat ratkaisut $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ saadaan karakteristisen yhtälön

$$r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{3.24}$$

juurten avulla. Kirjoitetaan (3.24) muodossa

$$(r-r_1)^{m_1}(r-r_2)^{m_2}\cdots(r-r_s)^{m_s} = 0, \qquad m_1 + m_2 + \cdots + m_s = n,$$

ts. r_i on m_i-kertainen juuri. Silloin juuret $r_i,\ i = 1, 2, \ldots, s$, antavat lineaarisesti riippumattomat ratkaisut seuraavasti:

Tapaus 1. Kun $r_i \in \mathbb{R}$, saadaan lineaarisesti riippumattomat ratkaisut

$$e^{r_i x}, xe^{r_i x}, \ldots, x^{m_i-1}e^{r_i x}.$$

Tapaus 2. Kun $r_i = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. Silloin on olemassa sellainen $j \neq i$, että $r_j = \alpha - i\beta$ ja $m_j = m_i$. Juuret r_i ja r_j antavat yhdessä lineaarisesti riippumattomat ratkaisut

$$\begin{array}{l} e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{m_i-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{m_i-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{array}$$

Esimerkki 3.10.1. Ratkaistaan yhtälö

$$y^{(3)} = 0.$$

Sen karakteristinen yhtälö on

$$r^3 = 0,$$

jonka 3-kertainen juuri on $r = 0$. Siis ratkaisu on

$$\begin{aligned} y &= C_1e^{0x} + C_2xe^{0x} + C_3x^2e^{0x} \\ &= C_1 + C_2x + C_3x^2. \end{aligned}$$

Esimerkki 3.10.2. Ratkaistaan yhtälö

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$$

Sen karakteristinen yhtälö on

$$\begin{array}{l} r^4 + 2r^2 + 1 = 0 \\ (r^2+1)^2 = 0 \\ (r+i)^2(r-i)^2 = 0, \end{array}$$

joten $r = \pm i$ on 2-kertainen kompleksijuuripari. Siis ratkaisu on

$$\begin{aligned} y &= C_1e^{0x}\cos x + C_2xe^{0x}\cos x + C_3e^{0x}\sin x + C_4xe^{0x}\sin x \\ &= C_1\cos x + C_2x\cos x + C_3\sin x + C_4x\sin x. \end{aligned}$$

Tarkastellaan vielä lopuksi epähomogeenista yhtälöä

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x).$$

Sen yleinen ratkaisu on muotoa

$$y = \underbrace{C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x)}_{\text{Homog.yht. yl. ratk.}} + \underbrace{\psi(x)}_{\text{vars. yht. jokin ratk.}},$$

missä $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ ovat homogeenisen yhtälön lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja.

Huomautus 3.10.1. Tällä kurssilla $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ ovat vakiofunktioita ja $b(x)$ sellainen funktio, että yksityisratkaisun etsimiseen voidaan käyttää määräämättömien kertoimien menetelmää.

Esimerkki 3.10.3. Ratkaistaan yhtälö

$$y''' + y'' + y' + y = 1.$$

Homogeenisen yhtälön karakteristinen yhtälö ja sen ratkaisu on

$$\begin{aligned}
&r^3 + r^2 + r + 1 = 0 \\
&(r+1)(r^2+1) = 0 \\
&(r+1)(r-i)(r+i) = 0 \\
&r = -1, \quad r = \pm i.
\end{aligned}$$

Siis homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Etsitään koko yhtälön yksityisratkaisu yritteellä $y = A$, josta saadaan yksityisratkaisu $y = 1$. Koko yhtälön yleinen ratkaisu siis on

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x + 1.$$

3.11 Esimerkkejä sovelluksista

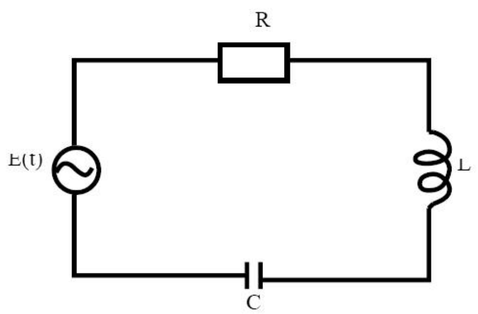
Esimerkki 3.11.1 (Vaimenematon harmoninen värähtely)**.** Asetetaan kappale värähtelemään jousen päähän jousen suuntaan. Oletetaan, että mikään ulkopuolinen voima ei vaikuta kappaleeseen (ei edes ilmanvastus). Merkitään y:llä kappaleen sijaintia tasapainopisteen suhteen. Silloin $F = -ky$ eli $ma = -ky$, missä k on ns. jousivakio. Näin saadaan differentiaaliyhtälö

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0.$$

Sen ratkaisu on muotoa

$$y = A \sin wt + B \cos wt.$$

Esimerkki 3.11.2 (Virtapiiri)**.** Tarkastellaan millä tavalla vastus, kondensaattori ja käämi määräävät sarjapiirin virran I, kun virta värähtelee sähkömotorisen voiman pakottamana.



Olkoon vastuksen resistanssi R, käämin induktanssi L, kondensaattorin kapasitanssi C ja sähkömotorinen voima $E(t)$. Olkoon alussa kondensaattorin varaus q_0 ja piirin virta I_0.

Kirchhoffin lain mukaan

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}q - E(t) = 0. \tag{1}$$

Koska $I = dq/dt$, niin

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}E(t), \tag{2}$$

missä $q(0) = q_0$ ja $dq/dt|_{t=0} = I_0$. Virralle I saadaan differentiaaliyhtälö, kun kaava (1) derivoidaan ajan t suhteen. Silloin saadaan

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}\frac{dE(t)}{dt},$$

missä $I(0) = I_0$ ja $dq/dt|_{t=0} = E(0)/L - RI_0/L - q_0/(LC)$.

Luku 4

Differentiaaliyhtälöryhmistä

Merkitään

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix},$$

missä $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ovat tuntemattomia funktioita, $a_{ij}(x)$:t ovat tunnettuja (jatkuvia) reaalifunktioita ja myös $b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x)$ ovat tunnettuja (jatkuvia) reaalifunktioita. Silloin yhtälö

$$Y' = A(x)Y + B(x) \tag{4.1}$$

määrittelee yhtälöryhmän

$$\begin{cases} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x), \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x), \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x). \end{cases}$$

Itse asiassa kyseessä on *lineaarinen 1. kertaluvun diff. yhtälöryhmä.* Jos $B(x)$ on nollavektori, niin yhtälöryhmää sanotaan *homogeeniseksi.* Jos funktiot $a_{ij}(x)$ ovat vakiofunktioita, on yhtälöryhmä *vakiokertoiminen.* Tällä kurssilla painopiste on vakiokertoimisissa homogeenisissa yhtälöryhmissä.

Edellä A on itse asiassa *matriisifunktio* $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, ts. funktion arvot ovat matriiseja. Vastaavasti B on *vektorifunktio* $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, ts. funktion arvot ovat vektoreita.

Tarkastellaan nyt homogeenisista yhtälöryhmää

$$Y' = A(x)Y. \tag{4.2}$$

Olkoon $\mathcal{C}_n(I)$ (välillä I) jatkuvien vektorifunktioiden avaruus ja $\mathcal{C}_n^{(1)}(I)$ (välillä I) jatkuvasti derivoituvien vektorifunktioiden avaruus. Silloin $L : \mathcal{C}_n^{(1)}(I) \to$

$\mathcal{C}_n(I)$, $LY = Y' - A(x)Y$, on lineaarikuvaus. Yhtälöryhmän (4.2) ratkaisuavaruus on lineaarikuvauksen L ydin. Voidaan todistaa, että sen dimensio on n. Yhtälöryhmän (4.2) yleinen ratkaisu on siis

$$Y = C_1\Phi_1(x) + C_2\Phi_2(x) + \cdots + C_n\Phi_n(x), \quad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}, \tag{4.3}$$

missä $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_n(x)$ ovat lineaarisesti riippumattomia vektorifunktioita.

Merkitään

$$\Phi_i(x) = \begin{pmatrix} \phi_i^{(1)}(x) \\ \phi_i^{(2)}(x) \\ \vdots \\ \phi_i^{(n)}(x) \end{pmatrix}$$

ja

$$M(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) & \Phi_2(x) & \cdots & \Phi_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^{(1)}(x) & \cdots & \phi_n^{(1)}(x) \\ \phi_1^{(2)}(x) & \cdots & \phi_n^{(2)}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{(n)}(x) & \cdots & \phi_n^{(n)}(x) \end{pmatrix}.$$

Matriisia $M(x)$ kutsutaan yhtälöryhmän (4.2) *perusmatriisiksi*.

Huomautus 4.0.1. On helppo todeta, että yhtälöryhmän (4.2) yleinen ratkaisu on

$$Y = M(x)C, \quad C \in \mathbb{R}^n. \tag{4.4}$$

Huomautus 4.0.2. Vektorifunktioiden $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_n(x)$ lineaarinen riippumattomuus voidaan todistaa osoittamalla (harj.), että

$$\exists x_0 \in I : \det M(x_0) \neq 0.$$

Jatkossa tarkastelemme vakiokertoimisien yhtälöryhmien ratkaisumenetelmiä. Ensin tutustumme homogeenisiin ja sen jälkeen lyhyesti epähomogeenisiin yhtälöryhmiin. Vakiokertoimisessa yhtälöryhmässä $A(x) = A$, ts. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on matriisi.

4.1 Homogeenisen vakiokertoimisen lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemisesta

Homogeeninen vakiokertoiminen lineaarinen yhtälöryhmä on muotoa

$$Y' = AY$$

eli muotoa

$$\begin{cases} y_1' &= a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n, \\ y_2' &= a_{21}y_1 + \cdots + a_{2n}y_n, \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n. \end{cases}$$

4.1.1 Eliminointimenettely

Ratkaisuperiaate (kun $n = 2$):

1) Eliminoidaan 1. yhtälöstä y_2, ts. tehdään 1. yhtälöstä 2. yhtälön avulla vain y_1:n yhtälö.

2) Ratkaistaan y_1.

3) Sen jälkeen y_2 saadaan 1. yhtälön avulla.

Esimerkki 4.1.1. Olkoon

$$Y' = AY, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

eli

$$y_1' = 3y_1 - 2y_2 \tag{4.5}$$

$$y_2' = 2y_1 - 2y_2. \tag{4.6}$$

Käyttämällä kaavoja (4.5) ja (4.6) sekä uudelleen kaavaa (4.5) saadaan

$$y_1'' = 3y_1' - 2y_2' = 3y_1' - 2(2y_1 - 2y_2) = y_1' + 2y_1$$

Siis

$$y_1'' - y_1' - 2y_1 = 0$$

$$r^2 - r - 2 = 0 \iff r = 2 \ \vee \ r = -1$$

Näin ollen

$$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

Edelleen kaavan (4.5) mukaan

$$y_2 = \frac{1}{2}(3y_1 - y_1') = \ldots = \frac{1}{2} C_1 e^{2x} + 2C_2 e^{-x}.$$

Siis

$$Y = \begin{pmatrix} C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \\ \frac{1}{2} C_1 e^{2x} + 2C_2 e^{-x} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{2x} \\ \frac{1}{2} e^{2x} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-x} \\ 2e^{-x} \end{pmatrix}.$$

4.1.2 Matriisin ominaisarvoista ja ominaisvektoreista

Pykälässä 4.1.3 lukijan odotetaan tuntevan matriisialgebran perusteet. Tässä pykälässä kerrataan lyhyesti matriisin ominaisarvon ja ominaisvektorin käsitteet.

Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

neliömatriisi. Silloin matriisin A *ominaisarvot* ovat yhtälön

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

reaaliset juuret. (Kompleksijuurten tapausta ei tässä tarkastella.) Vektori

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (\in \mathbb{R}^n \setminus \{\overline{0}\})$$

on ominaisarvoon λ liittyvä *ominaisvektori*, jos

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Huomautus 4.1.1. Matriisilla A on korkeintaan n ominaisarvoa.

Huomautus 4.1.2. Eri ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia. (Todistettu opintojaksolla Lineaarialgebra 1B.)

Huomautus 4.1.3. Vektorit

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

ovat lineaarisesti riippumattomia, jos ja vain jos

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

4.1.3 Matriisimenettely

Tarkastellaan diff.yhtälöryhmää

$$Y' = AY, \tag{4.7}$$

missä A on $n \times n$-matriisi. Oletetaan, että matriisilla A on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Silloin yhtälön (4.7) ratkaisu on

$$Y = C_1 X_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 X_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n X_n e^{\lambda_n x}, \quad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}, \tag{4.8}$$

missä λ_i ($\in \mathbb{R}$) on ominaisvektoria X_i vastaava ominaisarvo ja $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ovat vakioita.

Esimerkki 4.1.2. Ratkaistaan diff.yhtälöryhmä

$$Y' = AY, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ominaisarvot:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda = 1 \vee \lambda = 4 \vee \lambda = -2.$$

Ominaisvektorit: Etsitään 3 lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria. Koska A:lla on 3 erisuurta ominaisarvoa, saadaan lineaarisesti riippumattomat ominaisvektorit valitsemalla kutakin ominaisarvoa kohti yksi ominaisvektori. (Huomaa, että $\overline{0}$ ei ole ominaisvektori.)

$\lambda = 1:$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \iff \quad \begin{cases} -x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_3 = 0 \\ 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Siis esim. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on ominaisvektori.

$\lambda = 4:$

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \iff \quad \begin{cases} x_2 = x_3 \\ 3x_1 = 2x_3. \end{cases}$$

Siis esim. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ on ominaisvektori.

$\lambda = -2:$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \iff \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Siis esim. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ on ominaisvektori.

Valitut ominaisvektorit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ovat siis lineaarisesti riippumattomia. Ratkaisu on

$$\begin{aligned} Y &= C_1X_1e^{\lambda_1 x} + C_2X_2e^{\lambda_2 x} + C_3X_3e^{\lambda_3 x} \\ &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4x} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2x} \\ &= \begin{pmatrix} C_1e^x + 2C_2e^{4x} \\ 3C_2e^{4x} + C_3e^{-2x} \\ 3C_2e^{4x} - C_3e^{-2x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esimerkki 4.1.3. Ratkaistaan diff.yhtälöryhmä

$$Y' = AY, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ominaisarvot:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 3 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda = 1 \vee \lambda = 2.$$

Ominaisvektorit: Etsitään 3 lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.

$\lambda = 1$**:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \iff \quad \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = 3x_1. \end{cases}$$

Siis esim. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ on ominaisvektori.

$\lambda = 2$**:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \iff \quad x_3 = x_1 + x_2.$$

Siis esim. $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ ovat ominaisvektoreita.

Tutkitaan, ovatko valitut ominaisvektorit

$$\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

lineaarisesti riippumattomia. Koska

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\3 & 1 & 1\end{vmatrix} \neq 0,$$

niin ko. vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia. Siis ratkaisu on

$$\begin{aligned} Y &= C_1\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}e^x + C_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{2x} + C_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^{2x} \\ &= \begin{pmatrix} C_1e^x + C_2e^{2x} \\ C_1e^x + C_3e^{2x} \\ 3C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{2x}\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.1.4 Laplace-muunnoksen käyttö

Esimerkki 4.1.4.

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2, \quad y_1(0) = 1 \\ y_2' = 2y_1 - 2y_2, \quad y_2(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \overline{y_1'} = \overline{3y_1 - 2y_2} \\ \overline{y_2'} = \overline{2y_1 - 2y_2} \end{cases}$$
$$\begin{cases} s\overline{y_1}(s) - y_1(0) = 3\overline{y_1}(s) - 2\overline{y_2}(s) \\ s\overline{y_2}(s) - y_2(0) = 2\overline{y_1}(s) - 2\overline{y_2}(s) \end{cases}$$

Ratkaistaan $\overline{y_1}(s)$ ja $\overline{y_2}(s)$. Saadaan (joidenkin laskutoimitusten jälkeen)

$$\begin{aligned} \overline{y_1}(s) &= \frac{1}{s-2} \\ \overline{y_2}(s) &= \frac{1}{2}\frac{1}{s-2} \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{cases} y_1 = e^{2x} \\ y_2 = \frac{1}{2}e^{2x} \quad \text{(Tarkistus)} \end{cases}$$

4.2 Epähomogeenisen vakiokertoimisien lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemisesta

4.2.1 Eliminointimenettely

Esimerkki 4.2.1.

$$Y' = AY + B(x), \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} x \\ 3e^x \end{pmatrix}$$

eli

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - 2y_2 + x, && (4.9) \\ y_2' &= 2y_1 - 2y_2 + 3e^x. && (4.10) \end{aligned}$$

Siis yhtälön (4.9) mukaan

$$y_1'' = 3y_1' - 2y_2' + 1 \stackrel{(2)}{=} 3y_1' - 4y_1 + 4y_2 + 6e^x + 1$$

Siis

$$y_1'' - y_1' - 2y_1 = -6e^x + 2x + 1. \tag{4.11}$$

Homogeenisen yhtälön $y_1'' - y_1' - 2y_1 = 0$ yleinen ratkaisu on

$$y_1 = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}.$$

Yrite yhtälöä (4.11) varten on

$$y_1 = Ae^x + Bx + C.$$

Saadaan

$$A = 3, \quad B = -1, \quad C = 0.$$

Yhtälön (4.11) ratkaisu on

$$y_1 = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + 3e^x - x.$$

Edelleen yhtälön (4.9) mukaan

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{1}{2}(3y_1 + x - y_1') \\ &= \cdots \\ &= 2C_1e^{-x} + \frac{1}{2}C_2e^{2x} + 3e^x - x + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4.2.2 Matriisimenetelmä ja yrite

Esimerkki 4.2.2.

$$Y' = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} e^{5x} \\ 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

1. Homogeeniyhtälön

$$Y' = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} Y$$

yleinen ratkaisu saadaan (esim.) matriisimenettelyllä. Se on

$$Y = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4x}. \quad \text{(Totea!)}$$

2. Yksityisratkaisu etsitään yritteellä. Koska $B(x)$ on muotoa

$$B(x) = \begin{pmatrix} e^{5x} \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{5x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

niin valitaan yriteeksi

$$Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{5x} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{5x} + c \\ be^{5x} + d \end{pmatrix}.$$

Sijoitetaan yhtälöön tämä (1). Silloin

$$\begin{pmatrix} 5ae^{5x} \\ 5be^{5x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^{5x} + c \\ be^{5x} + d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{5x} \\ 4 \end{pmatrix},$$

josta saadaan (joidenkin laskutoimitusten jälkeen)

$$a = 2, \quad b = 1, \quad c = -1, \quad d = 2.$$

Siis

$$Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{5x} - 1 \\ e^{5x} + 2 \end{pmatrix}.$$

3. Yleinen ratkaisu on

$$Y = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4x} + \begin{pmatrix} 2e^{5x} - 1 \\ e^{5x} + 2 \end{pmatrix}.$$

4.2.3 Laplace-muunnoksen käyttö

Esimerkki 4.2.3. Yhtälöryhmä

$$Y' = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tarkoittaa, että

$$\begin{cases} y_1' = -3y_1 - 5y_2 + 2, \quad y_1(0) = 1, \\ y_2' = y_1 + y_2 + 1, \quad y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Otetaan puolittain Laplace-muunnokset, jolloin saadaan

$$\begin{cases} \overline{y_1'} = \overline{(-3y_1 - 5y_2 + 2)}, \\ \overline{y_2'} = \overline{(y_1 + y_2 + 1)}. \end{cases}$$

Laplace-muunnoksen ominaisuuksien nojalla

$$\begin{cases} s\overline{y_1}(s) - y_1(0) = -3\overline{y_1}(s) - 5\overline{y_2}(s) + \frac{2}{s}, \\ s\overline{y_2}(s) - y_2(0) = \overline{y_1}(s) + \overline{y_2}(s) + \frac{1}{s}. \end{cases}$$

Ratkaistaan $\overline{y_1}(s)$ ja $\overline{y_2}(s)$, jolloin saadaan

$$\begin{cases} \overline{y_1}(s) = -\frac{7}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\left(9\frac{s+1}{(s+1)^2+1} + 7\frac{1}{(s+1)^2+1}\right), \\ \overline{y_2}(s) = \frac{5}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\left(5\frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1}\right). \end{cases}$$

Katsotaan käänteismuunnokset taulukosta, jolloin saadaan ratkaisu

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\left(9e^{-x}\cos x + 7e^{-x}\sin x\right), \\ y_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\left(5e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x\right). \end{cases}$$

(Tarkistus!)

4.3 Esimerkki sovelluksesta

Esimerkki 4.3.1. Tarkastellaan kappaleen liikettä xy-tasossa. Silloin nopeuden x- ja y-komponentit ovat

$$v_x(t) = x'(t), \quad v_y(t) = y'(t).$$

Oletetaan, että $v_x(t)$ ja $v_y(t)$ ovat muotoa

$$\begin{aligned} v_x(t) &= ax(t) + by(t), \\ v_y(t) &= cx(t) + dy(t). \end{aligned}$$

Silloin kappaleen liikeradan parametriesitys saadaan ratkaisemalla differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Mitkä ovat kiihtyvyyden x- ja y-komponentit? Miten yhtälö muuttuu, jos tarkastellaan liikettä xyz-avaruudessa? Mikä on kappaleen liikerata, kun $a = d = 1$, $b = c = 0$, ja kun $a = d = 0$, $b = c = 1$?